Sonderdruck

ABHANDLUNGEN DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Klasse für Mathematik, Physik und Technik

Jahrgang 1965 Heft 3

GERHARD MAESS

QUANTITATIVE VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG PERIODISCHER LÖSUNGEN AUTONOMER NICHTLINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Mit 17 Abbildungen und 2 Tabellen

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1965

Berlin, H. U., Mat.

Promotion 29. Sep. 1965

Vorgelegt von Hrn. K. Schröder in der Klassensitzung vom 14. 1. 1965

Zum Druck genehmigt am gleichen Tage, ausgegeben am 30. 10. 1965

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, 108 Berlin, Leipziger Straße 3 – 4
Copyright 1965 by Akademie-Verlag GmbH
Lizenznummer: 202 · 100/480/65
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 2001/65/I/3 · ES 19 B 4 · Preis: MDN 12,30

Inhalt

1. Über die Existenz und Eindeutigkeit von Grenzzyklen 5
1.1. Grundbegriffe, Definitionen 7
1.2. Sätze über Grenzzyklen 8
1.3. Grundlegende Voraussetzungen 8
1.4. Über das Verhalten von Grenzzyklen bei unbegrenzt wachsendem Parameter . . . 9

2. Bestimmung der periodischen Lösung mit Hilfe von LIE-Reihen 19
2.1. Ergebnisse der Theorie der LIE-Reihen 19
2.2. Berechnung der Koeffizienten der LIE-Reihen (2.1.6) 21
2.3. Konvergenz der LIE-Reihen (2.1.6) 22
2.4. Fehlerabschätzung 25
2.5. Bestimmung der periodischen Lösung 30

3. Anwendung auf die VAN DER POLsche Differentialgleichung 33
3.1. Berechnung der Koeffizienten der LIE-Reihen 33
3.2. Konvergenz der LIE-Reihen 34
3.3. Näherungslösungen ohne Fehlerabschätzung 35
3.4. Berechnung eines Ringgebietes für den Grenzzyklus 39

4. Eine Verallgemeinerung des Verfahrens von LINDSTEDT 41
4.1. Beschreibung des Verfahrens 41
4.2. 1. Fall 44
4.3. Konvergenz der Potenzreihenentwicklungen 48
4.4. Beispiel 48
4.5. 2. Fall 51
4.6. Entwicklung von Lösung und Frequenz in der Umgebung eines beliebigen Parameterwertes 54

5. Bestimmung der periodischen Lösung mit Hilfe eines FOURIER-Ansatzes 55
5.1. Aufstellung des Gleichungssystems 55
5.2. Auflösung mit Hilfe des verallgemeinerten NEWTONschen Näherungsverfahrens . . . 57
5.3. Beispiel: VAN DER POLsche Differentialgleichung 60

6. Zusammenfassung 63

7. Literatur 64

1. Über die Existenz und Eindeutigkeit von Grenzzyklen

Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen sind autonome, nichtlineare Differentialgleichungssysteme der Gestalt

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y) , \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y) , \tag{1.0.1}$$

die in einer Reihe von wichtigen physikalischen und technischen Problemen auftreten. Dabei seien die Funktionen P und Q Polynome ihrer Argumente:

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{m'} \sum_{l=0}^{k} p_{kl}\, x^{k-l}\, y^{l} ,$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{m''} \sum_{l=0}^{k} q_{kl}\, x^{k-l}\, y^{l} . \tag{1.0.2}$$

Die größte der positiven, ganzen Zahlen m' und m'', die den Grad der Polynome angeben, heiße Grad des Systems (1.0.1)

$$m = \max (m', m'') \geqq 2 . \tag{1.0.3}$$

Mit der Bedingung (1.0.3) ist der bereits vollständig untersuchte Fall [4, 30, 31, 62, 70] ausgeschlossen, daß sich (1.0.1) auf ein lineares System reduziert. Um die Rechnungen zu vereinfachen, sind die Koordinaten x, y so gewählt, daß die Absolutglieder der Polynome (1.0.2) verschwinden. Das läßt sich durch eine Koordinatentranslation immer erreichen.

Einigen Abschnitten liegt das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = y , \quad \dot{y} = -x - \mu f(x, y) , \quad \mu > 0 \tag{1.0.4}$$

zugrunde, das durch Spezialisierung aus (1.0.1) hervorgeht. Dabei ist μ ein reeller, positiver Parameter und f ein Polynom in x und y:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{kl}\, x^{k-l}\, y^{l} . \tag{1.0.5}$$

Häufig wird das System (1.0.4) als Differentialgleichung zweiter Ordnung geschrieben:

$$\ddot{x} + x + \mu f(x, \dot{x}) = 0 , \quad \mu > 0 . \tag{1.0.6}$$

Wegen ihrer Bedeutung in mechanischen oder elektrotechnischen Anwendungen werden oft die unabhängige Veränderliche t mit *Zeit*, die Lösungen von (1.0.1) $x(t)$ mit *Bewegungen* und eine periodische Lösung mit *Schwingung* bezeichnet. Gleichungen der Art (1.0.6) und Systeme der Form (1.0.1) gehören zum Untersuchungsobjekt der *Nichtlinearen Mechanik*, deren Verfahren nach zwei Hauptrichtungen unterschieden werden können: Die Untersuchungen der ersten Richtung, die auf Arbeiten von Poincaré [57] und Ljapunow [49] zurückgehen und unter dem Begriff *direkte Methode* zusammengefaßt werden, beschäftigen

sich mit dem geometrisch-qualitativen Verlauf der durch das (im allgemeinen Fall nichtautonome) System

$$\dot{x} = P(x, y, t) , \qquad \dot{y} = Q(x, y, t) \tag{1.0.7}$$

beschriebenen Bewegungen. Dabei werden direkt aus der Differentialgleichung, d. h. ohne vorher die Lösungen zu konstruieren, Bedingungen für die Beschränktheit und Stabilität der Lösungen und die Existenz von Schwingungen hergeleitet. Den größten Teil der auf diesem Gebiet bisher erzielten Ergebnisse findet man bei NEMYTSKII-STEPANOV [53], CODDINGTON-LEVINSON [10], LEFSCHETZ [43], MALKIN [50], HAHN [22] und in dem 1963 erschienenen Buch von REISSIG-SANSONE-CONTI [63].

Die Arbeiten der zweiten Richtung, die sich ebenfalls auf POINCARÉ [56] stützen, haben die Konstruktion der Lösungen mit analytischen Mitteln zum Ziel. Man faßt sie unter dem Namen *indirekte Methode* zusammen. Über die bisher entwickelten Verfahren geben zahlreiche Monographien Aufschluß, u. a. die von ANDRONOW-CHAIKIN [1], MINORSKY [51, 52], STOKER [70], KAUDERER [31], KLOTTER [34], DEN HARTOG [23], CESARI [8], KRYLOFF-BOGOLIUBOFF [42] und das 1963 in erweiterter, dritter Auflage erschienene Buch von BOGOLJUBOW-MITROPOLSKI [6].

Die meisten analytischen Verfahren zur Bestimmung der periodischen Lösung von (1.0.7) beruhen entweder auf der vielfach nach KRYLOW und BOGOLJUBOW oder nach VAN DER POL [79] benannten Methode der Variation von Amplitude und Phase oder auf der von LINDSTEDT [47] eingeführten Methode der Entwicklung von Lösung und Periode in Potenzreihen nach einem kleinen Parameter, mit dem die nichtlinearen Glieder multipliziert sind [vgl. (1.0.4)]. In letzter Zeit ist von STRUBLE, FLETCHER und YIONOULIS [71—73] vorgeschlagen worden, diese beiden Verfahren zu kombinieren.

In allen genannten Arbeiten wird als wesentliche Einschränkung vorausgesetzt, daß die Nichtlinearität schwach ist, d. h. die nichtlinearen Glieder im Vergleich zu den linearen klein sind. Demgegenüber gibt es einige Veröffentlichungen über stark nichtlineare Differentialgleichungen, d. h. Systeme, in denen die nichtlinearen Glieder groß im Vergleich zu den linearen sind: DORODNICYN [15] berechnete die asymptotische Entwicklung der periodischen Lösung der VAN DER POL*schen Differentialgleichung*

$$\ddot{x} + x - \mu (1 - x^2) \dot{x} = 0 , \qquad \mu > 0 , \tag{1.0.8}$$

für $\mu \to \infty$, und STOKER [70] bestimmte die geometrische Gestalt der periodischen Lösung der RAYLEIGH*schen Differentialgleichung*

$$\ddot{x} + x - \mu \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3}\right) = 0 , \qquad \mu > 0 , \tag{1.0.9}$$

in einer transformierten $x, \dot{x}$-Ebene ebenfalls für $\mu \to \infty$. Abgesehen von einigen exakt integrierbaren nichtlinearen Gleichungen und Systemen, die sich nur wenig von ihnen unterscheiden (FAJZIBAEV [16]), gibt es für den mittleren Parameterbereich, d. h. für Systeme, in denen nichtlineare und lineare Glieder in gleicher Größenordnung auftreten, noch keine leistungsfähigen analytischen Methoden zur Bestimmung periodischer Lösungen.

Aus diesem Grunde werden in der vorliegenden Arbeit[1]) einige Verfahren vorgeschlagen, mit deren Hilfe die periodischen Lösungen wesentlich nichtlinearer Differentialgleichungssysteme der Gestalt (1.0.1) bzw. (1.0.4) konstruiert werden können.

---

[1]) Die Arbeit wurde im April 1964 an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Humboldt-Universität zu Berlin als Dissertation eingereicht. Der Verfasser möchte auch an dieser Stelle Herrn Professor Dr. phil. habil. R. REISSIG herzlich für sein stets förderndes Interesse an dieser Arbeit danken.

1.1. Grundbegriffe, Definitionen

Da P und Q Polynome sind, verläuft nach den bekannten Sätzen der Differentialgleichungstheorie [4, 30] durch jeden Punkt des x,y,t-Raumes genau eine Integralkurve des Systems (1.0.1). Ihre Projektion (parallel zur t-Achse) auf die *Phasenebene* (x,y-Ebene) heißt *Phasenkurve* (*Charakteristik*). Da die Zeit t in (1.0.1) nicht explizit auftritt, haben alle Integralkurven, die in einem beliebigen Punkt einer Parallele zur t-Achse beginnen, dieselbe Phasenkurve, die von dem Schnittpunkt $(x_0, y_0, 0)$ der Parallele mit der Phasenebene ausgeht, d. h., das Phasenbild des Systems (1.0.1) ist invariant gegenüber Translationen der Zeit (Phasenverschiebungen). Durch Untersuchung des Phasenbildes kann man bereits einen gewissen Einblick in das Lösungsverhalten von (1.0.1) gewinnen. Für $P(x, y) \neq 0$ bzw. $Q(x, y) \neq 0$ läßt sich in (1.0.1) die Zeit eliminieren. Man erhält die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \qquad P(x, y) \neq 0, \tag{1.1.1}$$

bzw.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \qquad Q(x, y) \neq 0, \tag{1.1.1'}$$

für die Phasenkurven.

Verschwinden in einem Punkt (x_0, y_0) der Phasenebene sowohl P als auch Q,

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

so liefert (1.0.1) die von der Zeit unabhängige Lösung

$$x(t) = x_0, \qquad y(t) = y_0, \tag{1.1.2}$$

d. h., in (x_0, y_0) hat das System eine *Ruhelage* (*Gleichgewichtslage*). Der Punkt (x_0, y_0) heißt dann *stationär* (*singulär*). Offenbar ist der Koordinatenursprung ein stationärer Punkt von (1.0.1), da die Polynome P und Q nach (1.0.2) keine Absolutglieder besitzen. Schließt man die stationären Punkte aus, so bestimmt (1.1.1) (bzw. (1.1.1')) zu jedem Punkt der x, y-Ebene genau eine Phasenkurve. Geschlossene Phasenkurven entsprechen periodischen Lösungen des Ausgangssystems (1.0.1). Alle Untersuchungen, die sich auf den zeitlichen Verlauf der Lösungen von (1.0.1) beziehen, also insbesondere die Bestimmung der Periode und des Stabilitätsverhaltens, werden allerdings durch die Elimination der Zeit hinfällig.

Nach Birkhoff [5] nennt man einen Punkt (x_0, y_0) der Phasenebene einen *ω-Grenzpunkt* (*α-Grenzpunkt*) einer Phasenkurve Γ_0, wenn eine streng monoton steigende (fallende), divergente Folge $\{t_n\}$ existiert, so daß die zu den t_n gehörenden Punkte (x_n, y_n) der Phasenkurve der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2} = 0 \tag{1.1.3}$$

genügen. Die Gesamtheit der ω-Grenzpunkte (α-Grenzpunkte) heißt *ω-Grenzmenge* $\Omega(\Gamma_0)$ (*α-Grenzmenge* $A(\Gamma_0)$) der Charakteristik Γ_0. Gehört eine Phasenkurve Γ wenigstens einer Grenzmenge an, so bezeichnet man sie als *Grenzcharakteristik*, ist sie überdies geschlossen und nicht entartet (d. h. kein stationärer Punkt) und stellt sie für mindestens eine von Γ verschiedene Charakteristik die Menge $\Omega(\Gamma_0)$ bzw. $A(\Gamma_0)$ dar, so heißt sie *Grenzzyklus*, den man *orbital stabil* (*orbital instabil*) oder auch kurz stabil (instabil) nennt, wenn er sowohl für die inneren als auch für die äußeren benachbarten Phasenkurven die ω-Grenzmenge (α-Grenzmenge) darstellt, andernfalls wird er als *semistabil* bezeichnet. Die Gesamtheit aller Phasenkurven, für die der Grenzzyklus Γ die ω-Grenzmenge bildet, heißt *Einzugsgebiet* von Γ.

Faßt man einen stationären Punkt als entarteten Grenzzyklus auf, so läßt sich die oben gegebene Stabilitätsdefinition übertragen: Ist ein stationärer Punkt ω-Grenzmenge (α-Grenzmenge) der benachbarten Phasenkurven, so nennt man ihn stabil (instabil).

1.2. Sätze über Grenzzyklen

Die folgenden allgemeinen Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Grenzzyklen werden in späteren Abschnitten benötigt. Die Beweise sind nicht ausgeführt, man findet sie z. B. bei REISSIG-SANSONE-CONTI [63].

Satz 1.1. *Das Gebiet im Inneren eines Zyklus enthält wenigstens einen singulären Punkt.*

Satz 1.2. (Kriterium von BENDIXSON [3]). *Wenn in einem einfach zusammenhängenden Gebiet der Phasenebene der Ausdruck*

$$P_x(x, y) + Q_y(x, y)$$

nirgends sein Vorzeichen wechselt und auch nicht identisch verschwindet, dann treten dort keine Zyklen auf.

Satz 1.3. *$\mathfrak{G}'$ sei das Ringgebiet zwischen zwei aufeinanderfolgenden geschlossenen Kurven $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$. Weder in $\mathfrak{G}'$ noch auf den Randkurven $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ mögen singuläre Punkte liegen. Wenn alle von $\mathfrak{C}'$ oder $\mathfrak{C}''$ ausgehenden Charakteristiken sogleich in $\mathfrak{G}'$ eindringen ($\mathfrak{G}'$ verlassen) dann heißt $\mathfrak{G}'$ BENDIXSONsches Ringgebiet und enthält mindestens einen Grenzzyklus.*

Satz 1.4. *Die Differentialgleichung*

$$\ddot{x} + x + f(x)\,\dot{x} = 0 \tag{1.2.1}$$

besitzt eine eindeutige periodische Lösung, wenn

a) $f(x) < 0$ *über* (δ_1, δ_2), $\delta_1 < 0 < \delta_2$,
$f(x) > 0$ *über* $(-\infty, \delta_1)$ *und* (δ_2, ∞),

b) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \infty$, $F(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds$,

c) $F(-\delta_0) = F(\delta_0) = 0$ *für einen Wert* $\delta_0 > 0$

gilt.

1.3. Grundlegende Voraussetzungen

Über die bereits getroffenen Voraussetzungen über P und Q in (1.0.1) bzw. f in (1.0.4) hinaus wird im folgenden, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, stets angenommen, daß der Koordinatenursprung $(0, 0)$ der einzige stationäre Punkt des Systems ist. Die Betrachtungen werden auf ein endliches Gebiet $\mathfrak{G}$ der Phasenebene beschränkt, in dem sich genau ein stabiler Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ befinden möge. Dabei soll der stationäre Punkt und eine gewisse ε-Umgebung $\mathfrak{U}(0, 0)$ nicht zu $\mathfrak{G}$ gehören. Die Kreisfrequenz (oder kürzer Frequenz) der durch $\mathfrak{C}$ dargestellten, gesuchten periodischen Lösung von (1.0.1) bzw. (1.0.4) wird mit ω, die Periode mit T bezeichnet:

$$x(t + T) = x(t), \qquad y(t + T) = y(t), \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.3.1}$$

1.4. Über das Verhalten von Grenzzyklen bei unbegrenzt wachsendem Parameter

Ehe wir quantitative Verfahren zur Bestimmung des Grenzzyklus im mittleren Parameterbereich entwickeln, zeigen wir noch an einem Beispiel, daß man bei hinreichend großem Parameter ein recht aufschlußreiches qualitatives Studium des Grenzzyklus durchführen kann; die entsprechenden Selbstschwingungen gehen dann in die bei einigen physikalischen Problemen auftretenden *Relaxationsschwingungen* (Kippschwingungen) über. Die Gleichung

$$\ddot{x} - \mu \dot{x} |\dot{x}| (1 - x^2) + x = 0 , \qquad \mu > 0 , \tag{1.4.1}$$

in der μ ein reeller Parameter ist, wird nach KLOTTER [36] *modifizierte* VAN DER POLsche Differentialgleichung genannt, weil ihre Lösungen mit denen von (1.0.8) eine Reihe von Eigenschaften gemeinsam haben. Insbesondere wird in [37] bewiesen, daß die Lösungen von (1.4.1) oszillatorisch (Spiralen in der Phasenebene) sind und daß ihre Maximalausschläge („Amplituden") für $t \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert gehen, die modifizierte VAN DER POLsche Gleichung (1.4.1) also wie (1.0.8) einen stabilen Grenzzyklus besitzt.

Im folgenden wird gezeigt, daß der Grenzzyklus von (1.4.1) für $\mu \to \infty$ in der geeignet transformierten Phasenebene existiert und dort konstruiert werden kann.

Für die RAYLEIGHsche Differentialgleichung (1.0.9), die durch Differentiation nach t und die Substitution $\dot{x} = u$ in (1.0.8) übergeht, untersuchte STOKER [70, Appendix IV] den Grenzzyklus für große μ in einer ξ,v-Ebene, die er durch

$$\xi = \frac{x}{\mu} , \qquad v = \dot{x}$$

aus der Phasenebene erhielt.

Für $\dot{x} > 0$ geht (1.4.1) über in

$$\ddot{x} - \mu \dot{x}^2 (1 - x^2) + x = 0 , \qquad \mu > 0 , \qquad \dot{x} > 0 . \tag{1.4.2}$$

Bezeichnet man $\dot{x}$ mit v, so erhält man aus (1.4.2) das äquivalente System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x} = v , \qquad \dot{v} = \mu v^2 (1 - x^2) - x , \qquad v > 0 , \tag{1.4.3}$$

und daraus die Differentialgleichung

$$v' = \frac{dv}{dx} = \mu v (1 - x^2) - \frac{x}{v} , \qquad v > 0 , \tag{1.4.4}$$

für die Phasenbahn in der x,v-Ebene. Für die *Nullisoklinen*, d. h. die Kurven verschwindenden Feldanstiegs ($v' = 0$), ergibt sich demnach aus (1.4.4)

$$v = + \sqrt{\frac{x}{\mu (1 - x^2)}} . \tag{1.4.5}$$

Da $v > 0$ gesetzt wurde, muß die positive Wurzel genommen werden. Man sieht leicht, daß die Wurzel in (1.4.5) nur für

$$-\infty < x < -1 \qquad \text{und} \qquad 0 \leqq x < 1 \tag{1.4.6}$$

reelle Werte annimmt. Für $\dot{x} < 0$ erhält man aus (1.4.1) analog

$$\ddot{x} + \mu \dot{x}^2 (1 - x^2) + x = 0 , \qquad \mu > 0 , \qquad \dot{x} < 0 , \tag{1.4.7}$$

bzw. das äquivalente System

$$\dot{x} = v , \qquad \dot{v} = -\mu v^2 (1 - x^2) - x , \qquad v < 0 , \tag{1.4.8}$$

und damit die Differentialgleichung

$$v' = \frac{dv}{dx} = -\mu\, v\,(1 - x^2) - \frac{x}{v}\,, \qquad v < 0\,, \tag{1.4.9}$$

für die Phasenbahn. Daraus folgt die Gleichung

$$v = -\sqrt{-\frac{x}{\mu\,(1 - x^2)}} \tag{1.4.10}$$

für die Nullisoklinen. Der Definitionsbereich von (1.4.10) ist

$$-1 < x \leqq 0\,, \qquad 1 < x < \infty\,. \tag{1.4.11}$$

Die Kurven (1.4.5) und (1.4.10) sind in Abb. 1.1 für einige Parameterwerte μ dargestellt. Für wachsende μ nähern sie sich ihren Asymptoten, der Abszisse und den Geraden $x = \pm 1$. Diese sind durch gestrichelte Geraden angedeutet. Bezeichnet man den Ast $-\infty < x < -1$ von (1.4.5) mit $\mathfrak{C}_1$, den Ast $-1 < x \leqq 0$ von (1.4.10) und $0 \leqq x < 1$ von (1.4.5) mit $\mathfrak{C}_2$ und schließlich den Ast $1 < x < \infty$ von (1.4.10) mit $\mathfrak{C}_3$, so gilt:

Satz 1.5. *Der Grenzzyklus der modifizierten* VAN DER POL*schen Differentialgleichung* (1.4.1) *befindet sich im Gebiet* $\mathfrak{G}_2$ *zwischen den beiden Kurven* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_3$; *er hat mit der x-Achse und* $\mathfrak{C}_2$ *jeweils genau zwei Schnittpunkte gemeinsam, die symmetrisch zum stationären Punkt (Nullpunkt der Phasenebene liegen)* (Abb. 1.2).

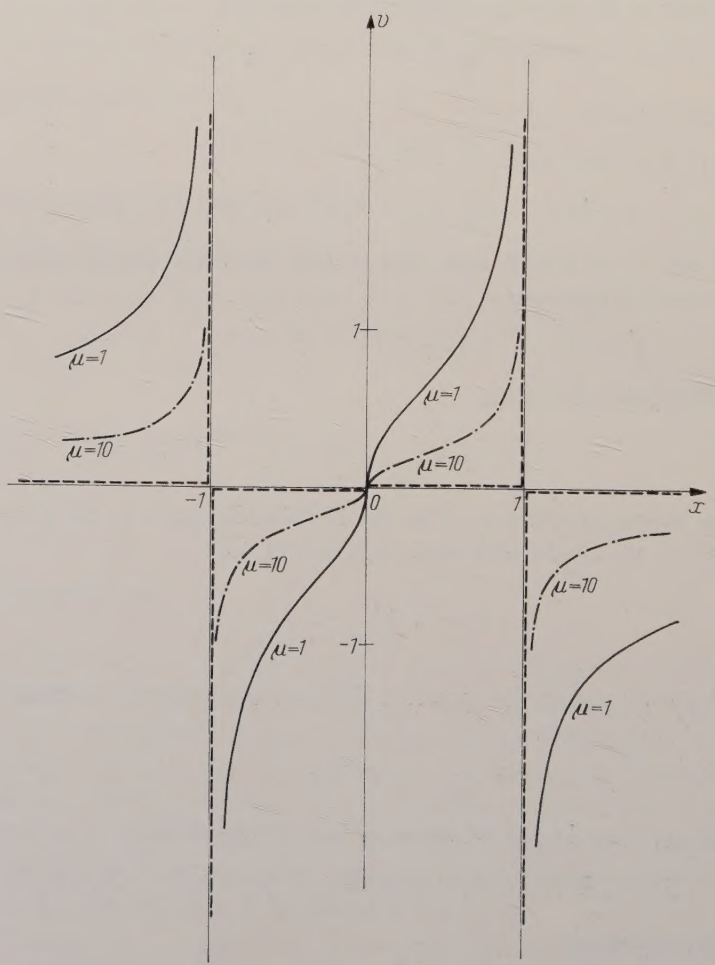

Abb. 1.1

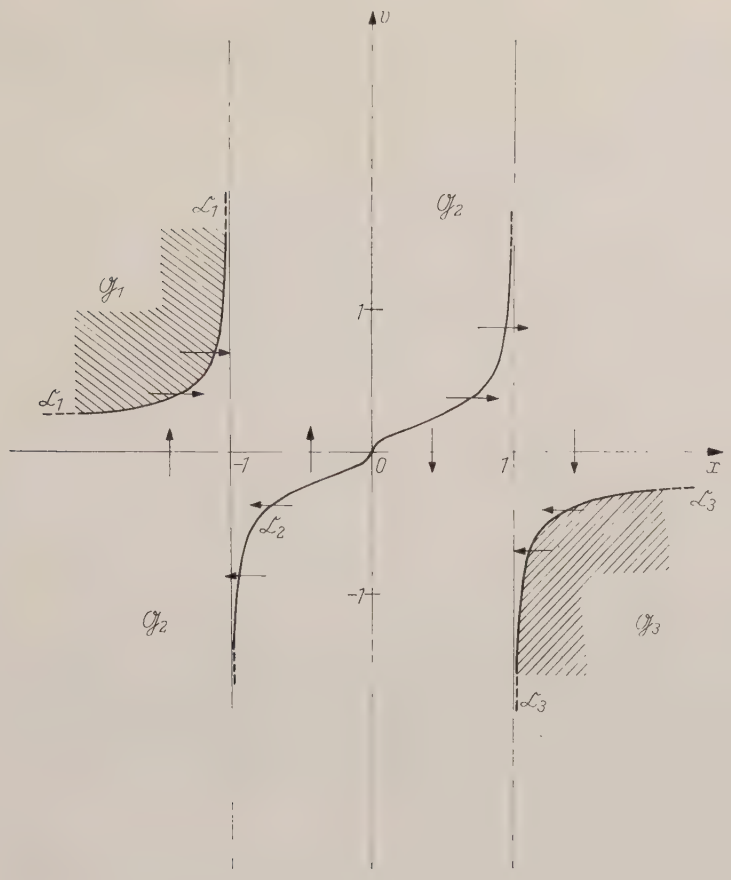

Abb. 1.2

Beweis. Aus den Gleichungen (1.4.3) und (1.4.8) für die Komponenten des Vektors $\{\dot{x}, \dot{v}\}$ des Richtungsfeldes leitet man leicht ab, daß das Phasenbild bezüglich des Ursprungs symmetrisch ist; die Phasenbahnen schneiden die Nullisoklinen in der oberen Halbebene ($v > 0$) von links nach rechts und in der unteren Halbebene ($v < 0$) von rechts nach links (Abb. 1.2). Da eine geschlossene Lösungskurve den stationären Punkt (0,0) einschließen muß (vgl. Satz 1.1), kann der Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ von (1.4.1) nicht vollständig in $\mathfrak{G}_1$ oder $\mathfrak{G}_3$ liegen. Hätte $\mathfrak{C}$ andererseits einen Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}_1$ (oder $\mathfrak{C}_3$), so müßte, weil $\mathfrak{C}$ geschlossen ist, noch ein weiterer Schnittpunkt mit derselben Kurve existieren. Da die Phasenbahnen und demzufolge auch der Grenzzyklus in einem einheitlichen Richtungssinn durchlaufen werden, müßte $\mathfrak{C}_1$ (oder $\mathfrak{C}_3$) im zweiten Schnittpunkt in entgegengesetzter Richtung überschritten werden als im ersten. Das ist aber, wie oben gezeigt wurde, unmöglich. Also liegt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}_2$.

Zum Beweis des zweiten Teils von Satz 1.5 bemerkt man, daß $\mathfrak{C}$ sowohl die x-Achse als auch die Isokline $\mathfrak{C}_2$ (wegen des periodischen Verlaufes von $x(t)$ bzw. $v(t)$) wenigstens an zwei Stellen schneidet und daß die Schnittpunkte wegen der vorhandenen Symmetrie des Phasenbildes zueinander symmetrisch liegen müssen. Man nimmt nun an, daß $\mathfrak{C}$ zwei (zeitlich aufeinanderfolgende) Schnittpunkte P_1, P_2 mit der positiven x-Achse besitzt:

$$0 < x_1 < x_2 < \infty \ ;$$

da alle Phasenbahnen die positive x-Achse von oben nach unten durchsetzen (vgl. (1.4.3) bzw. (1.4.8)), gibt es für den Verlauf des Phasenbahnbogens P_1P_2 nur eine der beiden auf Abb. 1.3 angedeuteten Möglichkeiten. Im ersten Fall muß die (geschlossene) Phasenbahn $\mathfrak{C}$ in einem späteren Zeitpunkt das durch den Bogen P_1P_2 und die Strecke $x_1 \leqq x \leqq x_2$ begrenzte

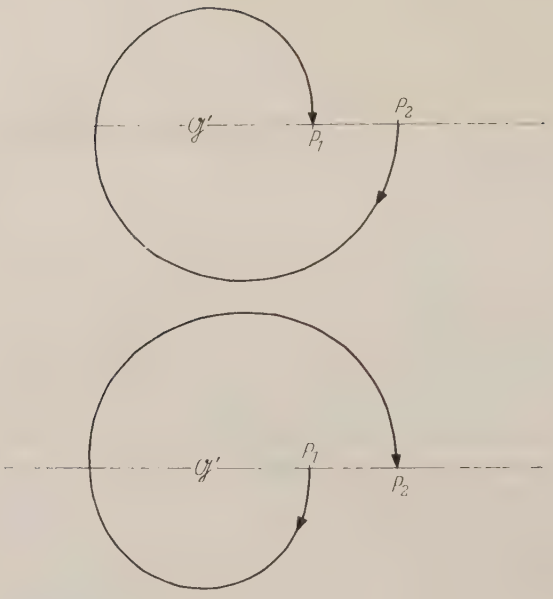

Abb. 1.3

Gebiet $\mathfrak{G}'$ wieder verlassen, im zweiten Fall aber in $\mathfrak{G}'$ eindringen. Beides ist auf Grund des Eindeutigkeitssatzes und der Bemerkung über das Richtungsfeld auf der positiven x-Halbachse ausgeschlossen. Analog beweist man den Sachverhalt für $\mathfrak{C}_2$.

Aus dem Kriterium von BENDIXSON folgt

Satz 1.6. *Der Grenzzyklus von* (1.4.1) *liegt nicht vollständig im Streifen* $-1 \leqq x \leqq 1$.

Beweis. Das Gesamtsystem

$$x' = v\,, \qquad v' = \mu \operatorname{sgn} v\, v^2 (1 - x^2) - x$$

besitzt (trotz der Unstetigkeit von sgn v an der Stelle $v = 0$) stetig differenzierbare rechte Seiten, so daß Satz 1.2 anwendbar ist. Der Ausdruck

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}[-x + \mu \operatorname{sgn} v\, v^2 (1 - x^2)] = 2\,\mu \operatorname{sgn} v\, v\, (1 - x^2)$$

ist im Streifen $-1 \leqq x \leqq 1$ größer oder gleich Null, ohne in einem Teilgebiet identisch zu verschwinden.

Um das Verhalten des Grenzzyklus für $\mu \to \infty$ zu studieren, wird an Stelle von v eine neue Veränderliche y eingeführt:

$$v = e^{\mu y} - 1\,, \qquad v \geqq 0\,. \tag{1.4.12}$$

Da $e^{\mu y} - 1$ eine monotone Funktion ist, liefert (1.4.12) eine umkehrbare eindeutige Abbildung von $v > 0$ auf $y > 0$,

$$y = \frac{1}{\mu} \log (v + 1)\,;$$

aus $y = 0$ ergibt sich $v = 0$ und umgekehrt. Die Schnittpunkte der Phasenbahnen mit der x-Achse bleiben also fest. Mit (1.4.12) folgt aus (1.4.3)

$$\dot{y} = e^{-\mu y} (e^{\mu y} - 1)^2 (1 - x^2) - \frac{x}{\mu} e^{-\mu y}\,, \qquad y \geqq 0\,, \tag{1.4.13}$$

und weiter

$$y' = \frac{dy}{dx} = (1 - e^{-\mu y})(1 - x^2) - \frac{x}{\mu} \frac{1}{e^{\mu y} (e^{\mu y} - 1)}\,, \qquad y > 0\,. \tag{1.4.14}$$

Für $\mu \to \infty$ erhält man daraus in jedem Bereich $-X \leqq x \leqq X$, $y \geqq \eta > 0$

$$y' = 1 - x^2 \tag{1.4.15}$$

mit der Lösung

$$y = c_1 + x - \frac{x^3}{3}, \qquad y > 0, \qquad c_1 \text{ Integrationskonstante}. \tag{1.4.16}$$

Die Nullisokline (1.4.5) bekommt in der x,y-Ebene die Gestalt

$$y = \frac{1}{\mu} \log \left\{ 1 + \sqrt{\frac{x}{\mu\,(1 - x^2)}} \right\}, \qquad y > 0, \tag{1.4.17}$$

mit dem Definitionsbereich (1.4.6) und ist wegen

$$\frac{dv}{dx} = \mu\, e^{\mu y} \frac{dy}{dx}$$

auch in der transformierten Ebene wieder Nullisokline. Wie man leicht sieht, besitzt sie ebenfalls die Geraden $x = \pm 1$ als Asymptoten.

Entsprechend der Formel (1.4.12) transformiert man $v \leqq 0$ gemäß

$$-v = e^{-\mu y} - 1, \qquad v \leqq 0, \tag{1.4.20}$$

wodurch wieder eine eineindeutige Zuordnung zwischen v und y gewährleistet ist:

$$y = -\frac{1}{\mu} \log (1 - v).$$

Aus (1.4.8) ergibt sich

$$\dot{y} = -e^{\mu y} (1 - e^{-\mu y})^2 (1 - x^2) - \frac{x}{\mu} e^{\mu y}, \qquad y \leqq 0, \tag{1.4.21}$$

und damit für den Anstieg des Richtungsfeldes

$$y' = \frac{dy}{dx} = (1 - e^{\mu y})(1 - x^2) + \frac{x}{\mu}\, e^{-\mu y} \frac{1}{(e^{-\mu y} - 1)}, \qquad y < 0. \tag{1.4.22}$$

Offensichtlich bleibt die bereits erwähnte Symmetrie der Lösungskurven bezüglich des Nullpunkts der x,v-Ebene auch in der x,y-Ebene erhalten: Ersetzt man x durch $-x$ und y durch $-y$, so geht (1.4.14) in (1.4.22) über. Die weiteren Betrachtungen können deshalb auf die obere Halbebene ($y \geqq 0$) beschränkt werden.

Der Streifen $-1 \leqq x \leqq 1$ der x, v-Ebene wird auf denselben Streifen der x,y-Ebene abgebildet. Nach Satz 1.6 kann der Grenzzyklus von (1.4.1) dann auch in der x,y-Ebene nicht vollständig in diesem Streifen liegen. Er wird also die negative x-Achse in einem Punkt $(-a, 0)$, $a > 1$, von unten nach oben durchsetzen. Da sich die in die x,y-Ebene transformierte Nullisokline $\mathfrak{C}_1$ (vgl. Abb. 1.2) mit wachsendem μ immer dichter an die x-Achse anschmiegt und der Zyklus $\mathfrak{C}$ die Kurve $\mathfrak{C}_1$ nicht schneiden darf, bleibt $\mathfrak{C}$ im Intervall

$$-a \leqq x < -1$$

beliebig nahe oberhalb der x-Achse, d. h.

$$0 < y \leqq \eta,$$

wenn nur μ genügend groß ist, d. h.

$$\mu \geq M(\eta, x).$$

Deshalb kann man vermuten, daß der Zyklus $\mathfrak{C}$ für $\mu \to \infty$ im Intervall

$$-a \leqq x < -1$$

zur Abszissenachse strebt, im Intervall

$$-1 \leqq x \leqq a$$

hingegen zu der Kurve

$$y = -\frac{2}{3} + x - \frac{x^3}{3}, \qquad y(-1) = 0,$$

so daß dann

$$\lim_{\mu \to \infty} a(\mu) = 2$$

sein müßte. Wir behaupten also:

Satz 1.7. *Für $\mu \to \infty$ strebt der Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ der modifizierten* VAN DER POL*schen Differentialgleichung in der x,y-Ebene zu folgender Grenzkurve hin* (Abb. 1.4):

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)} & 2 \geqq x \geqq 1, & y = 0 \\ \text{b)} & 1 \geqq x \geqq -2, & y = -\frac{2}{3} + x - \frac{x^3}{3}, \\ \text{c)} & -2 \leqq x \leqq -1, & y = 0, \\ \text{d)} & -1 \leqq x \leqq 2, & y = \frac{2}{3} + x - \frac{x^3}{3}. \end{array}\right\} \tag{1.4.23}$$

Der Satz wird durch Konstruktion eines BENDIXSONschen Ringgebietes $\mathfrak{G}'$ bewiesen. Dann liegt nach Satz 1.3 in $\mathfrak{G}'$ mindestens ein Grenzzyklus. Die periodische Lösung von (1.4.1) ist aber nach [37] eindeutig, also liegt der gesuchte Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}'$, wenn das Richtungsfeld überall auf den Randkurven $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ in das Innere von $\mathfrak{G}'$ zeigt. Er hat die Gestalt (1.4.23), wenn sich das Ringgebiet auf eine beliebig kleine Umgebung von $\mathfrak{C}$ zusammenziehen läßt.

$\mathfrak{G}'$ werde durch die Außenkurve $\mathfrak{C}'$ und die Innenkurve $\mathfrak{C}''$ begrenzt (Abb. 1.5). Die Außenkurve $\mathfrak{C}'$ bestehe aus dem Geradenstück P_1P_2,

$$x = 2 + \delta, \qquad 0 \geqq y \geqq -\delta, \qquad \delta > 0, \tag{1.4.24}$$

(wobei die positive Zahl δ aus dem Intervall $0 < \delta < 2/3$ beliebig vorgegeben wird), dem Geradenstück P_2P_3,

$$2 + \delta \geqq x \geqq 1 + \delta, \qquad y = -\delta, \tag{1.4.25}$$

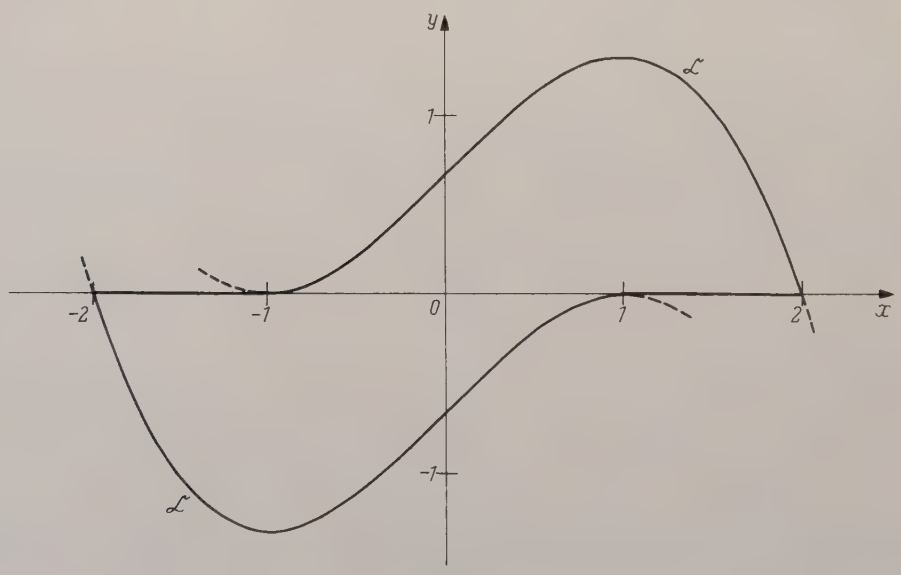

Abb. 1.4

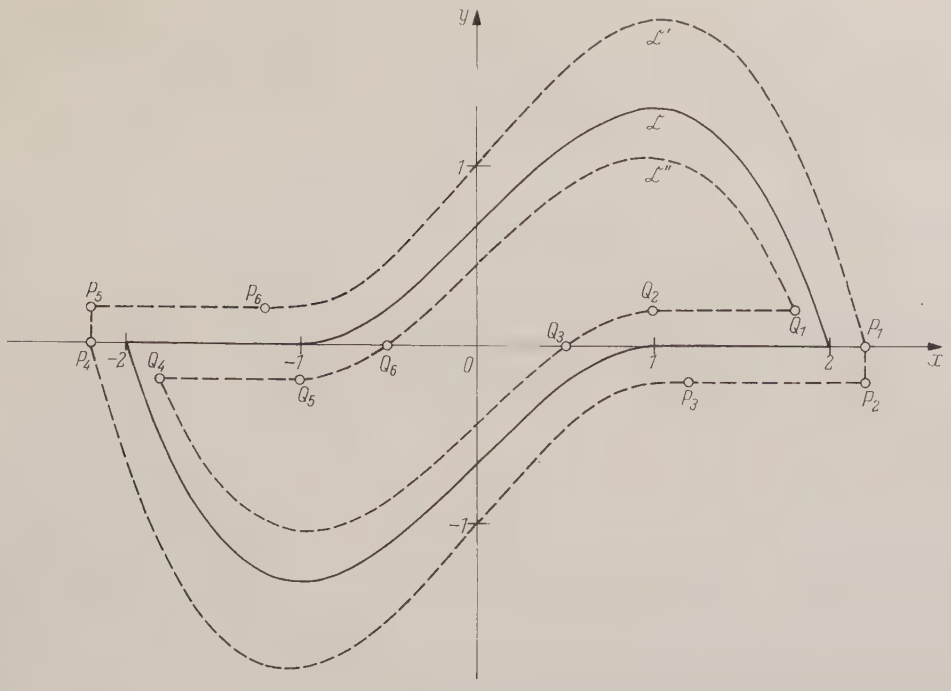

Abb. 1.5

dem Kurvenbogen P_3P_4,

$$1 + \delta \geqq x \geqq -2 - \delta\,, \qquad y = c_3 + c_4\,(x - 1 - \delta) + x - \frac{x^3}{3} \tag{1.4.26}$$

und den Geradenstücken P_4P_5, P_5P_6 sowie dem Kurvenbogen P_6P_1, die sich durch Spiegelung am Nullpunkt aus (1.4.24), (1.4.25) und (1.4.26) ergeben. Die Konstanten c_3 und c_4 in (1.4.26) werden durch die Koordinaten der Endpunkte P_3 und P_4 bestimmt:

$$P_3 \sim (1 + \delta, -\delta)\,, \qquad P_4 \sim (-2 - \delta, 0)\,. \tag{1.4.27}$$

Damit folgt aus (1.4.26)

$$c_3 = -\frac{2}{3} - \delta + \delta^2 + \frac{1}{3}\,\delta^3 \tag{1.4.28}$$

und weiter

$$c_4 = \frac{2\,\delta + 3\,\delta^2 + \frac{2}{3}\,\delta^3}{3 + 2\,\delta} > 0\,. \tag{1.4.29}$$

Die Innenkurve $\mathfrak{C}''$ bestehe aus dem Geradenstück Q_2Q_3

$$2 - \delta \geqq x \geqq 1\,, \qquad y = 0\,, \qquad \delta > 0 \tag{1.4.30}$$

(wobei δ jetzt so zu wählen ist, daß $\mathfrak{C}''$ im Inneren der Kurve $\mathfrak{C}$ bleibt), dem Kurvenbogen Q_2Q_3

$$1 \geqq x \geqq x_3\,, \qquad y = -\frac{2}{3} + \delta + x - \frac{x^3}{3} \tag{1.4.31}$$

(wobei x_3 die im Intervall (0,1) liegende Wurzel von

$$-\frac{2}{3} + \delta + x - \frac{x^3}{3} = 0\,, \qquad 0 < \delta < \frac{2}{3}\,, \tag{1.4.32}$$

ist), dem Kurvenbogen Q_3Q_4

$$x_3 \geqq x \geqq -2 + \delta\,, \qquad y = c_5 + c_6\,(x - x_3) + x - \frac{x^3}{3} \tag{1.4.33}$$

und dem Geradenstück Q_4Q_5 sowie den Kurvenbögen Q_5Q_6 und Q_6Q_1, die sich durch Spiegelung am Nullpunkt aus (1.4.30), (1.4.31) und (1.4.33) ergeben. Die Konstanten c_5 und c_6 in (1.4.33) werden wie oben durch die Koordinaten der Endpunkte bestimmt. Dazu setzt man $x_3 = 1 - \delta'$, wobei δ' mit $0 < \delta' < 1$ wegen (1.4.32) der Gleichung

$$\delta'^2\left(1 - \frac{1}{3}\,\delta'\right) = \delta \tag{1.4.34}$$

genügen muß. Dann gilt

$$Q_3 \sim (1 - \delta', 0)\,, \qquad Q_4 \sim (-2 + \delta, -\delta)\,,$$

und für die Konstanten ergibt sich aus (1.4.33), (1.4.34)

$$c_5 = -\frac{2}{3} + \delta$$

und

$$c_6 = -\frac{\delta\left(1 - 2\,\delta + \frac{1}{3}\,\delta^2\right)}{3 - \delta - \delta'} < 0 \qquad \text{für} \qquad 0 < \delta < \frac{1}{2}\,. \tag{1.4.35}$$

Es ist nun zu prüfen, ob der Vektor des durch (1.4.12), (1.4.13) in der oberen ($y > 0$) und durch (1.4.20), (1.4.21) in der unteren Halbebene ($y < 0$) definierten Richtungsfeldes immer in das Innere des Ringgebietes $\mathfrak{G}'$ zeigt.

Der Punkt P_1 möge zum Bogen P_6P_1 gehören. Das Verhalten einer Lösungskurve, die in P_1 auf die Randkurve $\mathfrak{C}'$ trifft, wird deshalb später untersucht (vgl. P_4). Das Geradenstück P_1P_2 ($0 > y > -\delta$) ist eine senkrechte Strecke, $\dot{x}$ ist wegen (1.4.20) negativ, der Feldvektor $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ weist also (unabhängig vom Vorzeichen von $\dot{y}$) in das Innere von $\mathfrak{G}'$. Die Strecke P_2P_3 hat den Anstieg Null. Die Steigung des Feldvektors längs P_2P_3 ist nach (1.4.22) aus

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (1 - e^{-\mu\,\delta})\,(1 - x^2) + \frac{x}{\mu}\,\frac{1}{e^{\mu\,\delta}\,(e^{\mu\,\delta} - 1)} \tag{1.4.36}$$

zu bestimmen. Der erste Term geht für $\mu \to \infty$ gegen $1 - x^2 < 0$, der zweite gegen Null. Für jedes beliebig vorgegebene δ kann also durch Wahl eines hinreichend großen μ erreicht werden, daß der erste Term überwiegt und y' negativ wird. Dann zeigt der Feldvektor überall auf der abgeschlossenen Strecke P_2P_3

$$2 + \delta \geqq x \geqq 1 + \delta$$

in das Innere von $\mathfrak{G}'$. Der Kurvenbogen P_3P_4 hat den Anstieg

$$y' = 1 - x^2 + c_4\,, \qquad 1 + \delta \geqq x \geqq -2 - \delta\,. \tag{1.4.37}$$

Der Feldvektor zeigt in das Innere von $\mathfrak{G}'$, wenn der durch (1.4.22) angegebene Anstieg überall im Intervall

$$1 + \delta \geqq x \geqq -2 - \delta\,,$$

also auch im Punkt P_4, kleiner als der Kurvenanstieg (1.4.37) ist, d. h., wenn die Ungleichung

$$(x^2 - 1)\,e^{\mu y} + \frac{x}{\mu}\,\frac{1}{e^{-\mu y}\,(e^{-\mu y} - 1)} < c_4 \tag{1.4.38}$$

erfüllt ist. Es sei $\mu \geqq 1$ gewählt. Für $x = -(2 + \delta)$ hat man (wegen $c_4 < 2$)

$$y' = 1 - x^2 + c_4 < -1\,,$$

so daß auf P_3P_4 in einem Intervall

$$-2 - \delta \leqq x \leqq -2 - \delta'' \qquad (0 \leqq \delta''(\mu) < \delta)$$

eine Abschätzung

$$\mu^2\,y \geqq -\eta \qquad \left(\eta\,e^{\eta} \leq \frac{4}{(2 - \delta)^2}\,, \qquad 2\,(e^{\eta} - 1) \leq \eta\right)$$

erfüllt ist. Dann kann man dort rechnen:

$$(x^2-1)\,e^{\mu y}+\frac{x}{\mu}\frac{1}{e^{-\mu y}(e^{-\mu y}-1)}<(2+\delta)^2-1-\frac{2}{\mu}\frac{1}{\frac{-\mu y}{2}e^{\eta}}$$

$$\leqq (2+\delta)^2-1-\frac{4}{\eta\,e^{\eta}}\leqq -1<c_4\,.$$

Hingegen erhält man im Intervall $-2-\delta''\leqq x\leqq 1+\delta$, wo $\mu^2 y\leqq -\eta$ angenommen werden darf:

$$(x^2-1)\,e^{\mu y}+\frac{x}{\mu}\frac{1}{e^{-\mu y}(e^{-\mu y}-1)}<[(2+\delta)^2-1]\,e^{\eta}+\frac{1+\delta}{\mu\,e^{\eta}(e^{\eta}-1)}$$

$$<(2+\delta)^2\,e^{\eta}+\frac{1+\delta}{\mu\,\eta\,e^{\eta}}\leqq c_4\,,$$

wenn man noch $e^{\eta}\leqq\frac{c_4}{2\,(2+\delta)^2}$ und $\mu\geqq\frac{2\,(1+\delta)}{c_4\,\eta\,e^{\eta}}$ wählt.

Analog kann man beweisen, daß längs des Kurvenzugs $P_4P_5P_6P_1$ der Vektor des Richtungsfeldes ebenfalls immer in das Innere von $\mathfrak{G}'$ zeigt. Wegen der Spiegelsymmetrie bezüglich des Nullpunkts braucht darauf nicht näher eingegangen zu werden. Zu untersuchen bleibt das Verhalten des Feldvektors längs der Innenkurve $\mathfrak{C}''$. Die Strecke Q_1Q_2,

$$2-\delta\geqq x\geqq 1\,,$$

hat den Anstieg Null, die Komponente $\dot{x}$ des Feldvektors ist wegen (1.4.12) positiv, $\dot{y}$ dagegen wegen $x\geqq 1$ und (1.4.13) negativ, so daß der Vektor in das Innere von $\mathfrak{G}'$ zeigt. Der Kurvenbogen Q_2Q_3 hat die Steigung

$$y'=1-x^2\,, \tag{1.4.39}$$

die des Richtungsfeldes wird durch (1.4.14) angegeben. Da $\dot{x}$ positiv ist, zeigt der Feldvektor genau dann nach innen, wenn längs (1.4.31) der Feldanstieg kleiner als der Kurvenanstieg bleibt, d. h. wegen (1.4.14) und (1.4.39) die Ungleichung

$$-(1-x^2)\,e^{-\mu y}-\frac{x}{\mu}\frac{1}{e^{\mu y}(e^{\mu y}-1)}<0 \tag{1.4.40}$$

erfüllt ist, was für $0<x\leqq 1$ und $y>0$ offenbar immer der Fall ist. Im Punkt Q_3 selbst zeigt der Feldvektor senkrecht nach unten. Der Kurvenbogen Q_3Q_4 schließlich hat nach (1.4.33) den Anstieg

$$y'=1-x^2+c_6\,. \tag{1.4.41}$$

Die Komponente $\dot{x}$ ist jetzt negativ, der Feldvektor zeigt folglich in das Innere von $\mathfrak{G}'$, wenn der durch (1.4.22) angegebene Feldanstieg überall im Intervall $1\geqq x\geqq -2+\delta$, also auch im Punkt Q_4, größer als der Kurvenanstieg (1.4.41) ist:

$$-e^{\mu y}(1-x^2)+\frac{x}{\mu}\frac{1}{e^{-\mu y}(e^{-\mu y}-1)}>c_6\,.$$

Durch Multiplikation mit $(-e^{-\mu y})$ erhält man daraus die Bedingung

$$1-x^2-\frac{x}{\mu}\frac{1}{e^{-\mu y}-1}<-c_6\,e^{-\mu y}\,. \tag{1.4.42}$$

Für hinreichend kleines δ gilt, wie man sich leicht klarmacht,

$$y'=1-x^2+c_6>0 \qquad \text{für} \qquad 0\leqq x\leqq x_3=1-\delta'<1-\sqrt{\delta}$$

und somit

$$\mu^2 y\geqq -\eta \qquad \left(2\,(e^{\eta}-1)\leqq\eta\leqq\frac{1}{2}\right) \qquad \text{für} \qquad \frac{1}{2}\leqq x_3-\delta'''\leqq x\leqq x_3\,;$$

daher kann man rechnen:

$$1 - x^2 - \frac{x}{\mu}\frac{1}{e^{-\mu y} - 1} \leqq 1 - \frac{1}{2\,\mu\left(\frac{-\mu y}{2}\right)} = 1 + \frac{1}{\mu^2 y} \leqq -1 < -c_6\, e^{-\mu y}\,.$$

Andererseits erhält man für $-2 + \delta \leqq x \leqq x_3 - \delta'''$ wo $\mu^2 y \leqq -\eta$ angenommen werden kann,

$$1 - x^2 - \frac{x}{\mu}\frac{1}{e^{-\mu y} - 1} \leqq 1 < -c_6 e^{\mu\eta} \leqq -c_6 e^{-\mu y}\,,$$

wenn man $\mu > \frac{1}{\eta}\log\left(-\frac{1}{c_6}\right)$ wählt.

Da der Kurvenzug $Q_4Q_5Q_6Q_1$ durch Spiegelung am Nullpunkt aus $Q_1Q_2Q_3Q_4$ hervorgeht, braucht das Verhalten des Feldvektors längs $Q_4Q_5Q_6Q_1$ nicht noch gesondert untersucht zu werden. Es ist also gezeigt, daß für jedes (beliebig kleine) vorgegebene δ der Vektor des Richtungsfeldes immer in das Innere des durch die Kurvenzüge $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ begrenzten Ringgebietes $\mathfrak{G}'$ zeigt, wenn nur μ hinreichend groß gewählt wird. Da für $\delta \to 0$ sowohl $\mathfrak{C}'$ als auch $\mathfrak{C}''$ gegen $\mathfrak{C}$ gehen, ist Satz 1.7 bewiesen. Der Grenzzyklus der modifizierten VAN DER POLschen Differentialgleichung hat in der x,y-Ebene für $\mu \to \infty$ die Gestalt (1.4.23).

2. Bestimmung der periodischen Lösung mit Hilfe von Lie-Reihen

Erstmals von Lie [45] benutzte Reihenausdrücke der Gestalt (2.1.1) wurden 1956 von Gröbner wieder aufgegriffen und zur Lösung analytischer Differentialgleichungssysteme herangezogen. Einen Einblick in die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten, u. a. auch bei der Inversion von Funktionensystemen, bei der Lösung des n-Körperproblems und in der algebraischen Geometrie, vermitteln die Monographie von Gröbner [20] und eine Reihe von Veröffentlichungen [17, 21, 39].

Im folgenden Kapitel wird die periodische Lösung des Ausgangssystems (1.0.1) mit Hilfe der Lieschen Reihen numerisch bestimmt. Die periodische Lösung sei stabil und der stationäre Punkt (0,0) instabil, so daß vorausgesetzt werden darf, daß das betrachtete (beschränkte) Gebiet $\mathfrak{G}$ Einzugsgebiet des gesuchten Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ ist.

Bei der Aufstellung der Lie-Reihen werden die Anfangsbedingungen als variabel angesehen. Deshalb ist es zweckmäßig, folgende Bezeichnungen einzuführen: Eine Lösung des Ausgangssystems (1.0.1) wird mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet:

$$X(t)\,, \qquad Y(t)\,.$$

Sie hängt von der Zeit t und vorgegebenen Anfangswerten $X(t_0)$, $Y(t_0)$ ab, die mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden

$$X(t_0) = x_0\,, \qquad Y(t_0) = y_0\,.^{1}) \tag{2.0.1}$$

In späteren Abschnitten wird häufig nach den Anfangswerten differenziert. Dazu betrachtet man eine gewisse Umgebung $\mathfrak{U}(x_0, y_0)$ des Anfangspunktes (x_0, y_0), faßt die Anfangswerte in $\mathfrak{U}(x_0, y_0)$ als Veränderliche auf und bezeichnet sie mit x, y. Wenn alle Differentiationen durchgeführt worden sind, werden dafür wieder die numerisch gegebenen Werte x_0, y_0 gesetzt. Mit

$$X(t) = \varphi(x, y; t)\,, \qquad Y(t) = \psi(x, y; t) \tag{2.0.2}$$

wird eine Lösung von (1.0.1) bezeichnet, die durch einen Punkt $(x, y) \in \mathfrak{U}(x_0, y_0)$ verläuft.

2.1. Ergebnisse der Theorie der Lie-Reihen

In diesem Abschnitt werden eine Reihe von Ergebnissen, die Gröbner [20] für holomorphe komplexe Funktionen endlich vieler komplexer Veränderlicher hergeleitet hat, auf den hier benötigten Fall reeller Funktionen zweier reeller Veränderlicher angewendet.

Die Reihen

$$e^{tD}\,x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu\, x\,, \qquad e^{tD}\,y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu\, y \tag{2.1.1}$$

[1]) Da das System (1.0.1) autonom ist, läßt sich die Zeit t stets so transformieren, daß der Anfangszeitpunkt mit dem Zeitnullpunkt zusammenfällt. Es ist deshalb im folgenden immer $t_0 = 0$ gesetzt.

sollen x- bzw. y-LIE-*Reihe in* t heißen. Dabei sind die in den Gleichungen (2.1.1) links stehenden Ausdrücke lediglich als Abkürzungen für die rechten Seiten anzusehen, D ist ein linearer Differentialoperator der Gestalt

$$D = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.1.2}$$

und die Koeffizienten $D^\nu x$, $D^\nu y$ der LIE-Reihen werden schrittweise aus

$$D^\nu x = D\,(D^{\nu-1} x)\,, \qquad D^0 x = x\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.3}$$

bzw.

$$D^\nu y = D\,(D^{\nu-1} y)\,, \qquad D^0 y = y\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.4}$$

bestimmt. Dazu muß offenbar vorausgesetzt werden, daß die Koeffizienten $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ des Operators D beliebig oft nach x und y differenziert werden können. Da die beiden Funktionen nach (1.0.2) Polynome sind, ist diese Bedingung in jedem Punkt der x,y-Ebene erfüllt. Nach [20] gilt nun folgender

Satz 2.1. *Die Lösung des Differentialgleichungssystems* (1.0.1) *mit den Anfangsbedingungen*

$$X(0) = \varphi(x, y; 0) = x\,, \qquad Y(0) = \psi(x, y; 0) = y \tag{2.1.5}$$

wird durch die LIE-*Reihen*

$$X = \varphi(x, y; t) = e^{tD} x\,, \qquad Y = \psi(x, y; t) = e^{tD} y \tag{2.1.6}$$

dargestellt, die in der Umgebung eines jeden Punktes (x_0, y_0) *der* x,y-*Ebene absolut und gleichmäßig konvergieren, wenn* t *kleiner als eine von* x_0 *und* y_0 *abhängige Schranke* $t^*(x_0, y_0)$ *bleibt.*[1]) *Für* $t < t^*$ *dürfen die* LIE-*Reihen* (2.1.6) *in dieser Umgebung beliebig oft gliedweise nach* x, y *und* t *differenziert werden*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^{\nu+1} x\,, \tag{2.1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial x}(D^\nu x)\,, \tag{2.1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial y}(D^\nu x)\,. \tag{2.1.9}$$

Entsprechende Formeln gelten für die y-LIE-*Reihe.*

Für $x = x_0$, $y = y_0$ beschreibt (2.1.6) also den Verlauf der Phasenbahn durch den Punkt (x_0, y_0) in der x,y-Ebene im Zeitintervall

$$0 \leqq t < t^*(x_0, y_0)\,. \tag{2.1.10}$$

Soll die Lösung für t-Werte außerhalb dieses Intervalls bestimmt werden, so muß das erste (durch Entwicklung in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) gewonnene) Funktionselement analytisch fortgesetzt werden. Darüber gibt der Satz 2.2 Aufschluß [20]:

Satz 2.2. *Liegen sowohl* $t_1 > 0$ *als auch* $t_1 + t_2$ $(t_2 > 0)$ *innerhalb des Konvergenzintervalles* (2.1.10) *und setzt man*

$$\varphi(x_0, y_0; t_1) = x_1\,, \qquad \psi(x_0, y_0; t_1) = y_1\,,$$

so gilt

$$\begin{aligned} X &= \varphi(x_1, y_1; t_2) = \varphi(x_0, y_0; t_1 + t_2)\,, \\ Y &= \psi(x_1, y_1; t_2) = \psi(x_0, y_0; t_1 + t_2)\,. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

[1]) Vgl. Abschnitt 2.3.

Die mit den Anfangswerten x_1, y_1 angesetzten LIE-Reihen stellen also eine analytische Fortsetzung des durch die Entwicklung an der Stelle (x_0, y_0) festgelegten Funktionselements dar, wenn die Reihen $\varphi(x_1, y_1; t)$, $\psi(x_1, y_1; t)$ ein Konvergenzintervall

$$0 \leqq t \leqq t^*(x_1, y_1) \tag{2.1.12}$$

besitzen, das t-Werte mit

$$t_1 + t > t^*(x_0, y_0)$$

enthält; da man nun zeigen kann (vgl. 2.3), daß für alle $(x, y) \in \mathfrak{G}$

$$t^*(x, y) \geq t^* > 0$$

gilt, kann der Verlauf der im Zeitpunkt $t = 0$ in (x_0, y_0) beginnenden Phasenkurve bis zu einem beliebig vorgegebenen endlichen Zeitpunkt T_0 durch höchstens endlich viele analytische Fortsetzungen bestimmt werden.

2.2. Berechnung der Koeffizienten der LIE-Reihen (2.1.6)

Wendet man den Operator D auf x und y an, so erhält man gemäß (2.1.3) bzw. (2.1.4) schrittweise

$$\left.\begin{aligned} D^0 x &= x\,, & D^0 y &= y\,, \\ D^1 x &= P(x, y)\,, & D^1 y &= Q(x, y)\,, \\ D^2 x &= P\,P_x + Q\,P_y\,, & D^2 y &= P\,Q_x + Q\,Q_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

wobei $P_x = \frac{\partial}{\partial x} P(x, y), \ldots$ bedeutet. Die Formeln für die höheren Koeffizienten werden recht unübersichtlich. Es ist deshalb sinnvoll, die Koeffizienten durch einen digitalen Rechenautomaten berechnen zu lassen. Da ein solcher Automat aber keine Ableitungen bilden kann, muß die Berechnung der $D^\nu x$, $D^\nu y$ auf Rekursionsformeln zurückgeführt werden, die auf den numerisch gegebenen Anfangswerten $x = x_0$, $y = y_0$ und den endlich vielen Größen $P(x_0, y_0)$, $Q(x_0, y_0)$, $P_x(x_0, y_0)$, $Q_x(x_0, y_0)$, ... aufbauen.

Um diese Rekursionsformeln aufstellen zu können, wird zunächst eine Hilfsformel für den Ausdruck angegeben, der durch k-malige Ableitung nach x und l-malige Ableitung nach y aus dem Produkt $R(x, y)\,S(x, y)$ zweier stetiger, beliebig oft nach x und y differenzierbarer Funktionen R und S entsteht. Ferner werde zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\frac{\partial^n R(x, y)}{\partial^{n-\nu} x\ \partial^\nu y} = R_{(n-\nu)x,\,\nu y}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{2.2.2}$$

gesetzt. Dann erhält man durch wiederholte Anwendung der Produktregel die Formel

$$(R\,S)_{kx,\,ly} = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{\lambda=0}^{l} \binom{k}{\varkappa} \binom{l}{\lambda} R_{(k-\varkappa)x,\,(l-\lambda)y}\,S_{\varkappa x,\,\lambda y}\,. \tag{2.2.3}$$

Zur Abkürzung werde

$$\frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu x = c^\nu(x, y; t)\,, \qquad \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu y = d^\nu(x, y; t) \tag{2.2.4}$$

gesetzt. Die Reihen (2.1.6) können dann an der Stelle (x, y) in der Form

$$X = e^{tD} x = \sum_{\nu=0}^{\infty} c^\nu(x, y; t)\,, \qquad Y = e^{tD} y = \sum_{\nu=0}^{\infty} d^\nu(x, y; t) \tag{2.2.5}$$

geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} c^0 &= x\,, & d^0 &= y\,, \\ c^1 &= t\,P\,, & d^1 &= t\,Q\,, \\ c^2 &= \frac{t^2}{2}(PP_x + QP_y)\,, & d^2 &= \frac{t^2}{2}(PQ_x + QQ_y)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.6}$$

Für die letzten beiden Gleichungen kann man in Form einer Rekursionsformel auch

$$c^2 = \frac{t}{2}(P\,c_x^1 + Q\,b_y^1)\,, \qquad d^2 = \frac{t}{2}(P\,c_x^1 + Q\,d_y^1)$$

schreiben. Für allgemeines $\nu \geqq 2$ leitet man leicht ab

$$c^\nu = \frac{t}{\nu}(P\,c_x^{\nu-1} + Q\,c_y^{\nu-1})\,, \qquad d^\nu = \frac{t}{\nu}(P\,d_x^{\nu-1} + Q\,d_y^{\nu-1})\,. \tag{2 2.7}$$

Um c^3 zu bestimmen, benötigt man also die ersten Ableitungen von c^2, um c^4 zu bestimmen, die ersten Ableitungen von c^3 und zu deren Berechnung die zweiten Ableitungen von c^2 usw. Will man allgemein die c^ν, d^ν für $\nu = 0, 1, \ldots, n$, n positiv, ganz, berechnen, so benötigt man für c^n, d^n die ersten Ableitungen von c^{n-1}, d^{n-1}, die zweiten von c^{n-2}, d^{n-2}, die dritten von c^{n-3}, d^{n-3}, ... und allgemein die Ableitungen der Ordnung $n - \nu$ von c^ν, d^ν $(0 < \nu \leqq n)$.

Aus (2.2.6) folgt

$$\begin{aligned} &c_x^1 = t\,P_x\,, \quad d_x^1 = t\,Q_x\,, \quad c_y^1 = t\,P_y\,, \quad d_y^1 = t\,Q_y\,, \ldots, \\ &c_{kx,ly}^1 = t\,P_{kx,ly}\,, \quad d_{kx,ly}^1 = t\,Q_{kx,ly}\,. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Nimmt man nun an, man habe alle Ableitungen von $c^{\nu-1}$ bis zur Ordnung $n - \nu + 1$ bereits bestimmt, so erhält man die Ableitungen von c^ν aus folgender, auf (2.2.3) aufbauender Formel

$$c_{kx,ly}^\nu = \frac{t}{\nu}\sum_{\varkappa=0}^{k}\sum_{\lambda=0}^{l}\binom{k}{\varkappa}\binom{l}{\lambda}[P_{(k-\varkappa)x,(l-\lambda)y}\,c_{(\varkappa+1)x,\lambda y}^{\nu-1} + Q_{(k-\varkappa)x,(l-\lambda)y}\,c_{\varkappa x,(\lambda+1)y}^{\nu-1}]\,, \tag{2.2.9}$$

$$1 \leqq k + l \leqq n - \nu\,.$$

Die Ableitungen von d^ν sind aus (2.2.9) zu berechnen, wenn man dort c durch d ersetzt. Die ersten Koeffizienten c^ν, d^ν $(\nu = 0, 1)$ und ihre Ableitungen sind nach (2.2.6) und (2.2.8) Polynome in x, y und t. Die höheren Koeffizienten $(\nu = 2, 3, \ldots)$ und ihre Ableitungen gehen nach (2.2.9) durch eine endliche Anzahl von Multiplikationen und Differentiationen aus Polynomen hervor, sie sind demzufolge selbst Polynome. Wegen (1.0.2) und (1.0.3) ist der Grad von $c_{kx,ly}^\nu$, $d_{kx,ly}^\nu$ in den Veränderlichen x, y höchstens gleich

$$m_{k,l}^\nu = \nu\,(m - 1) + 1 - k - l\,. \tag{2.2.10}$$

Mit Hilfe der Rekursionen (2.2.9) und (2.2.7) und der zugehörigen Anfangswerte (2.2.8) und (2.2.6) können also die Koeffizienten $c^\nu(x, y; t)$, $d^\nu(x, y; t)$ in jedem Punkt (x, y) bis zu beliebig hoher Ordnung berechnet werden. Die Rekursionsformeln bieten den Vorteil, daß man ein einmal aufgestelltes Maschinenprogramm für alle Differentialgleichungssysteme des Typs (1.0.1) verwenden kann. Lediglich die Berechnung der Polynome $P(x, y)$, $Q(x, y)$ und der Ableitungen $P_x, Q_x, P_y, Q_y, \ldots$ hängt von der speziellen Gestalt des Systems ab. Explizite Formeln für die Koeffizienten müßten dagegen für jedes System neu aufgestellt und programmiert werden. Der Nachteil der Rekursionsformeln besteht in der größeren Maschinenrechenzeit, die benötigt wird, weil der Automat vor der Berechnung des nächsthöheren Koeffizienten erst eine Reihe von Ableitungen bilden muß.

2.3. Konvergenz der LIE-Reihen (2.1.6)

Die Schranke $t^*(x_0, y_0)$ für das Konvergenzintervall (2.1.10) der in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) entwickelten LIE-Reihen (2.1.6) kann mit Hilfe eines Satzes von GRÖBNER bestimmt werden: Nach [20] bezeichnet man den Ausdruck

$$\Delta = C\,(z + \beta)^m \frac{d}{dz}\,, \qquad C > 0\,,\ \beta \geqq 0\,, \tag{2.3.1}$$

als einen zu D *majoranten Operator* Δ, wenn das Polynom $C\,(z+\beta)^m$ für

$$|x - x_0| \leqq z\,,\quad |y - y_0| \leqq z \tag{2.3.2}$$

Majorante sowohl zu $P(x, y)$ als auch zu $Q(x, y)$ ist, d. h., wenn für (2.3.2) die Ungleichungen

$$|P(x,y)| \leqq C\,(z+\beta)^m\,,\qquad |Q(x,y)| \leqq C\,(z+\beta)^m\,,$$

$$\left|\frac{\partial^{k+l} P(x,y)}{\partial x^k\,\partial y^l}\right| \leqq \frac{d^{k+l}}{dz^{k+l}} C\,(z+\beta)^m\,,\quad \left|\frac{\partial^{k+l} Q(x,y)}{\partial x^k\,\partial y^l}\right| \leqq \frac{d^{k+l}}{dz^{k+l}} C\,(z+\beta)^m\,, k, l = 0, 1, \ldots, m\,, \tag{2.3.3}$$

gelten. Da definitionsgemäß $z \geqq 0$ ist, muß als Ableitung im Punkt $z = 0$ stets die rechtsseitige Ableitung genommen werden. Dann gilt der folgende

Satz 2.3. *Ist Δ ein majoranter Operator zu D, so sind*

$$\Delta^\nu(|x_0| + z)\,,\quad \Delta^\nu(|y_0| + z)\,,\quad \frac{d^\varrho}{dz^\varrho}\Delta^\nu(|x_0| + z)\,,\quad \frac{d^\varrho}{dz^\varrho}\Delta^\nu(|y_0| + z)\,,\quad \varrho = 1, 2, \ldots,$$

Majoranten zu $|D^\nu x|$, $|D^\nu y|$ und

$$\left|\frac{\partial^\varrho}{\partial x^r\,\partial y^{\varrho-r}} D^\nu x\right|,\quad \left|\frac{\partial^\varrho}{\partial x^r\,\partial y^{\varrho-r}} D^\nu y\right|,\quad r = 0, 1, \ldots, \varrho\,,$$

und für (2.3.2) *gilt*

$$|e^{tD} x| \leqq e^{t\Delta}\,(|x_0| + z)\,,\quad |e^{tD} y| \leqq e^{t\Delta}\,(|y_0| + z)\,, \tag{2.3.4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x} e^{tD} x\right| &\leqq \frac{d}{dz} e^{t\Delta}\,(|x_0| + z)\,,\\
\left|\frac{\partial}{\partial y} e^{tD} x\right| &\leqq \frac{d}{dz} e^{t\Delta}\,(|x_0| + z)\,,\\
\left|\frac{\partial}{\partial x} e^{tD} y\right| &\leqq \frac{d}{dz} e^{t\Delta}\,(|y_0| + z)\,,\\
\left|\frac{\partial}{\partial y} e^{tD} y\right| &\leqq \frac{d}{dz} e^{t\Delta}\,(|y_0| + z)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.5}$$

Um die im allgemeinen von x_0, y_0 abhängigen Größen C und β des zu P und Q majoranten Polynoms zu bestimmen, entwickelt man $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) und erhält für (2.3.2) die Abschätzungen

$$|P(x,y)| = |P(x_0,y_0) + (x - x_0)\,P_x(x_0,y_0) + \cdots| \leqq \sum_{r=0}^{m'} \frac{z^r}{r!}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^r + P(x_0,y_0)\right|, \tag{2.3.6}$$

$$|Q(x,y)| = |Q(x_0,y_0) + (x - x_0)\,Q_x(x_0,y_0) + \cdots| \leqq \sum_{r=0}^{m''} \frac{z^r}{r!}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^r Q(x_0,y_0)\right|. \tag{2.3.7}$$

Der Ausdruck $C\,(z+\beta)^m$ ist nun offenbar eine Majorante der Polynome P, Q, wenn seine sämtlichen Koeffizienten größer oder gleich der Summe der entsprechenden Koeffizienten in (2.3.6) und (2.3.7) sind, d. h., wenn folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$\frac{1}{r!}\left[\left|\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^r P(x_0,y_0)\right| + \left|\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^r Q(x_0,y_0)\right|\right] \leqq C\binom{m}{r}\beta^{m-r},\quad r = 0, 1, \ldots, m\,. \tag{2.3.8}$$

Da im allgemeinen mehr Ungleichungen als Unbekannte vorhanden sind, können die Größen C und β meist nicht in eindeutiger Weise bestimmt werden, man hat vielmehr bei ihrer Berechnung eine gewisse Freiheit. Eine Möglichkeit wird im Kapitel 3 am Beispiel der VAN DER POLschen Differentialgleichung gezeigt. Die Bestimmung kann auch für alle Punkte (x_0, y_0) eines beschränkten Gebietes einheitlich vorgenommen werden. Im Gegensatz zu den

$D^r x$, $D^r y$ lassen sich die Koeffizienten der Δ-Reihen in geschlossener Form angeben. Durch r-malige Anwendung des Operators (2.3.1) auf x bzw. y erhält man

$$\begin{aligned}\Delta^r(|x_0| + z) &= \Delta^r(|y_0| + z)\\ &= m\,(2\,m-1)\ldots[(r-1)\,(m-1)+1]\,C^r\,(z+\beta)^{r(m-1)+1}\,,\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

$r = 1, 2, \ldots$.

Nach dem Quotientenkriterium folgt damit für die Reihen $e^{t\Delta}(|x_0| + z)$ und $e^{t\Delta}(|y_0| + z)$

$$\frac{\Delta^{r+1}(|x_0| + z)}{\Delta^r(|x_0| + z)}\frac{t}{r+1} = \frac{\Delta^{r+1}(|y_0| + z)}{\Delta^r(|y_0| + z)}\frac{t}{r+1} = \frac{r(m-1)+1}{r+1}\,t\,C\,(z+\beta)^{m-1}\,. \tag{2.3.10}$$

Wegen

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r\,(m-1)+1}{r+1} = m-1$$

konvergieren die Δ-Reihen für

$$t < t^*(x_0, y_0) = \frac{1}{(m-1)\,C\,(z+\beta)^{m-1}}\,. \tag{2.3.11}$$

Wegen (2.3.4) ist $t^*\,(x_0, y_0)$ gleichzeitig eine Schranke für das Konvergenzintervall (2.1.10) der x- bzw. y-LIE-Reihe. Vergröbert man die Abschätzung des Konvergenzintervalles durch Verwendung einheitlicher Werte C, β für das betrachtete Gebiet $\mathfrak{G}$, so ergibt sich die oben behauptete Beziehung $t^*(x_0, y_0) \geqq t^* > 0$. Es gilt also folgender

Satz 2.4. *Die* LIE*-Reihen* (2.1.6) *konvergieren für* $t < t^*(x_0, y_0)$ *in der durch* (2.3.2) *definierten Umgebung des Punktes* (x_0, y_0) *und für* $t < t^*$ *in jedem Punkt des Gebietes* $\mathfrak{G}$.

Die Formeln (2.3.9) lassen sich zur Abschätzung des Restgliedes R_n der Δ-Reihen benutzen, das durch

$$e^{t\Delta}(|x_0| + z) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{t^\nu}{\nu!}\,\Delta^\nu(|x_0| + z) + R_n(x_0, y_0, t; z) \tag{2.3.12}$$

definiert wird und wegen der Majoranteneigenschaft der Δ-Reihen als obere Schranke für ein analog zu (2.3.12) definiertes Restglied der Reihen (2.1.6) verwendet werden kann. Ausführlich geschrieben ist

$$R_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{m}{2}\,\frac{(2\,m-1)\ldots(\nu-1)\,(m-1)+1}{3\quad\ldots\quad\nu}\cdot C^\nu\,(z+\beta)^{\nu(m-1)+1}\,t^\nu\,, \tag{2.3.13}$$

und wegen

$$\frac{(\nu-1)\,m-\nu+2}{\nu} = m-1-\frac{m-2}{\nu} \leqq m-1\,, \qquad m \geqq 2\,, \qquad \nu = 2, 3, \ldots,$$

folgt für positive t

$$R_n \leqq (m-1)^n\,C^{n+1}\,(z+\beta)^{(n+1)(m-1)+1}\,t^{n+1}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}[(m-1)\,C\,(z+\beta)^{m-1}\,t]^\nu\,, \tag{2.3.14}$$

$$R_n \leqq R_n^*(x_0, y_0, t; z) = \frac{(m-1)^n C^{n+1}(z+\beta)^{(n+1)(m-1)+1}\,t^{n+1}}{1-(m-1)\,C\,(z+\beta)^{m-1}\,t}\,. \tag{2.3.15}$$

Die Restgliedabschätzung läßt sich noch etwas verschärfen. Führt man nämlich in (2.3.13) einen neuen Laufindex ein, so lassen sich einige Faktoren vor das Summenzeichen ziehen:

$$\begin{aligned}R_n = &\frac{m\,(2\,m-1)\cdots(n-1)\,(m-1)+1}{n!}\,C^{n+1}(z+\beta)^{(n-1)(m-1)+1}\\ &\times t^{n+1}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\prod_{\varrho=0}^{\nu}\frac{(n+\varrho)\,m-n-\varrho+1}{n+1+\varrho}\,[C\,(z+\beta)^{n-1}\,t]^\nu\,.\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Wegen

$$\frac{(n+\varrho)\,m-n-\varrho+1}{n+1+\varrho} = m-1-\frac{m-2}{n+1+\varrho} \leqq m-1\,, \qquad m \geqq 2\,,$$

folgt für positive t

$$R_n \leq \frac{m\,(2\,m-1)\,\ldots\,[n\,(m-1)+1]}{(n+1)!}\,C^{n+1}(z+\beta)^{(n+1)(m-1)+1}\,t^{n+1} \times \sum_{\nu=0}^{\infty}\,[(m-1)\,C\,(z+\beta)^{m-1}\,t]^{\nu} \tag{2.3.17}$$

und schließlich mit (2.3.9)

$$R_n \leqq \overline{R}_n\,(x_0, y_0, t; z) = \frac{m\,(2\,m-1)\cdots[n\,(m-1)+1]\,C^{n+1}\,(z+\beta)^{(n+1)(m-1)+1}\,t^{n+1}}{(n+1)!\,[1-(m-1)\,C\,(z+\beta)^{m-1}\,t]}\,. \tag{2.3.18}$$

2.4. Fehlerabschätzung

Gesucht sei die Lösungskurve $X(t)$, $Y(t)$ des Systems (1.0.1) durch einen beliebig vorgegebenen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathfrak{G}$. Dazu berechnet man, wie in 2.2 angegeben, die Koeffizienten c^{ν}, d^{ν} der Reihen (2.1.6) an der Stelle (x_0, y_0) und aus den Formeln (2.1.10) und (2.3.11) das Konvergenzintervall dieser Reihen. Für jeden Wert

$$t = t_1\,, \quad 0 < t_1 < t^*(x_0, y_0)$$

bestimmen die Reihen (2.1.6) bzw. (2.2.5) einen Punkt $x_1 = X(t_1)$, $y_1 = Y(t_1)$ der gesuchten Lösungskurve. Bricht man diese Reihen nach dem n-ten Glied ab, so erhält man statt x_1 und y_1 Näherungswerte, die mit $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$ bezeichnet werden sollen:

$$x_1 = \bar{x}_1 + \delta x_1\,, \qquad y_1 = \bar{y}_1 + \delta y_1\,. \tag{2.4.1}$$

Für die Fehler δx_1, δy_1 gelten wegen (2.3.15) die Abschätzungen

$$|\delta x_1| \leqq R_n^*(x_0, y_0, t_1; 0)\,, \qquad |\delta y_1| \leqq R_n^*(y_0, y_0, t_1; 0)\,. \tag{2.4.2}$$

Mit fehlerhaften Werten

$$x = \bar{x} + \delta x\,, \qquad y = \bar{y} + \delta y$$

können nun aber (bei der Konstruktion der Funktionen $\varphi(x, y; t)$, $\psi(x, y; t)$) statt der exakten Koeffizienten $c^{\nu}(x, y; t)$, $d^{\nu}(x, y; t)$ nur Näherungswerte bestimmt werden. Durch Entwicklung an der Stelle $(\bar{x}, \bar{y})$ erhält man aus (2.2.6) und (2.2.8)

$$\left.\begin{aligned}
c^0(x, y; t) &= \bar{x} + \delta x = \bar{c}^0 + \delta c^0(\bar{x}, \delta x)\,,\\
d^0(x, y; t) &= \bar{y} + \delta y = \bar{d}^0 + \delta d^0(\bar{y}, \delta y)\,,\\
c^1(x, y; t) &= t\,P(x, y) = t\sum_{\nu=0}^{m'}\frac{1}{\nu!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu} P(\bar{x}, \bar{y})\\
&= \bar{c}^1 + \delta c^1(\bar{x}, \bar{y}, \delta x, \delta y; t)\,,\\
d^1(x, y; t) &= t\,Q(x, y) = t\sum_{\nu=0}^{m''}\frac{1}{\nu!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu} Q(\bar{x}, \bar{y})\\
&= \bar{d}^1 + \delta d^1(\bar{x}, \bar{y}, \delta x, \delta y; t)
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.3}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
c^1_{kx,ly}(x, y; t) &= t\,P_{kx,ly}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{m'-k-l}\frac{1}{\nu!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu} P_{kx,ly}(\bar{x}, \bar{y})\\
&= \bar{c}^1_{kx,ly} + \delta c^1_{kx,ly}(\bar{x}, \bar{y}, \delta x, \delta y; t)\,,\\
d^1_{kx,ly}(x, y; t) &= t\,Q_{kx,ly}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{m''-k-l}\frac{1}{\nu!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu} Q_{kx,ly}(\bar{x}, \bar{y})\\
&= \bar{d}^1_{kx,ly} + \delta\,d^1_{kx,ly}(\bar{x}, \bar{y}, \delta x, \delta y; t)\,, \qquad k, l = 0, 1, 2, \ldots\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.4}$$

Für allgemeines ν folgt aus (2.2.9) mit (2.2.10) die Rekursion[1])

$$
\left.\begin{aligned}
c^{\nu}_{kx,\,ly}(x,y;t) &= \frac{t}{\nu}\sum_{\varkappa=0}^{k}\sum_{\lambda=0}^{l}\binom{k}{\varkappa}\binom{l}{\lambda}\\
&\quad\times\left\{\left[\sum_{r=0}^{m_1}\frac{1}{r!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r}P_{(k-\varkappa)x,\,(l-\lambda)y}(x,y)\right]\right.\\
&\quad\times\left[\sum_{r=0}^{m_2}\frac{1}{r!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r}c^{\nu-1}_{(\varkappa+1)x,\,\lambda y}(\bar{x},\bar{y};t)\right]\\
&\quad-\left[\sum_{r=0}^{m_3}\frac{1}{r!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r}Q_{(k-\varkappa)x,\,(l-\lambda)y}(\bar{x},\bar{y})\right]\\
&\quad\times\left.\left[\sum_{r=0}^{m_2}\frac{1}{r!}\left(\delta x\,\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r}c^{\nu-1}_{\varkappa x,\,(\lambda+1)y}(\bar{x},\bar{y};t)\right]\right\}\\
&= \bar{c}^{\nu}_{kx,\,ly}+\delta c^{\nu}_{kx,\,ly}(\bar{x},\bar{y},\delta x,\delta y;t)\,,\\
m_1 &= m'-k+\varkappa-l+\lambda\,,\quad m_2=(\nu-1)(m-1)-\varkappa-\lambda\,,\\
m_3 &= m'-k+\varkappa-l+\lambda\,,\qquad \nu=2,3,\ldots,\\
&\qquad\qquad k,l=0,1,2,\ldots\,.
\end{aligned}\right\}\tag{2.4.5}
$$

Dabei sind die Näherungswerte $c^{\nu}_{kx,\,ly}(\bar{x},\bar{y};t)$, $d^{\nu}_{kx,\,ly}(\bar{x},\bar{y};t)$ für die Koeffizienten mit $\bar{c}^{\nu}_{kx,\,ly}$, $\bar{d}^{\nu}_{kx,\,ly}$ und die dazugehörigen Fehlergrößen (von mindestens der Ordnung δx bzw. δy) mit $\delta c^{\nu}_{kx,\,ly}$, $\delta d^{\nu}_{kx,\,yl}$ bezeichnet. Die mit den fehlerhaften Koeffizienten aufgestellten Reihen (2.2.5) liefern in ihrem durch (2.3.11) bestimmten Konvergenzbereich X, Y-Werte nur bis auf Fehler δX, δY

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \bar{X}+\delta X=\sum_{\nu=0}^{n}\bar{c}^{\nu}(\bar{x},\bar{y};t)+\sum_{\nu=0}^{n}\delta c^{\nu}(\bar{x},\bar{y},\delta x,\delta y;t)+R_n(\bar{x}+\delta x,\bar{y}+\delta y;t)\,,\\
Y &= \bar{Y}+\delta Y=\sum_{\nu=0}^{n}\bar{d}^{\nu}(\bar{x},\bar{y};t)+\sum_{\nu=0}^{n}\delta d^{\nu}(\bar{x},\bar{y},\delta x,\delta y;t)+R'_n(\bar{x}+\delta x,\bar{y}+\delta y;t)\,,
\end{aligned}\right\}\tag{2.4.6}
$$

die sich aus zwei Komponenten zusammensetzen: Die Terme

$$\sum_{\nu=0}^{n}\delta c^{\nu}\,,\qquad\sum_{\nu=0}^{n}\delta d^{\nu}$$

entstehen durch die fehlerhaft berechneten Koeffizienten $\bar{c}^{\nu}$, $\bar{d}^{\nu}$ und die Restglieder R_n, R'_n durch das Abbrechen der Reihen nach n Gliedern. Schließlich treten noch Abrundungsfehler auf, weil man sich beim Berechnen der Werte auf eine endliche Stellenzahl beschränkt.

Für die Beträge von δX und δY ergeben sich aus (2.4.6) die folgenden Abschätzungen:

$$
\left.\begin{aligned}
|\delta X| &\leqq \overline{\delta X}=\sum_{\nu=0}^{n}\overline{\delta c^{\nu}}+R^{*}_n(\bar{x}+\delta x,\bar{y}+\delta y;t)+\delta_0\,,\\
|\delta Y| &\leqq \delta Y=\sum_{\nu=0}^{n}\overline{\delta d^{\nu}}+R^{*}_n(\bar{x}+\delta x,\bar{y}+\delta y;t)+\delta_0\,.
\end{aligned}\right\}\tag{2.4.7}
$$

Dabei bedeuten $\overline{\delta c^{\nu}}$, $\overline{\delta d^{\nu}}$ obere Schranken für die Beträge von δc^{ν}, δd^{ν}; R^{*}_n ist nach (2.3.15) an der Stelle $(\bar{x},\bar{y})$ zu bestimmen, sofern

$$|\delta x|\leqq z\,,\qquad |\delta y|\leqq z\tag{2.4.8}$$

[1]) Die (2.4.5) entsprechende Formel für $d^{\nu}_{kx,\,ly}(x,y;t)$ erhält man wieder durch Ersetzen von c durch d.

gilt, und als Schranke δ_0 der Abrundungsfehler nimmt man

$$\delta_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-r} ,$$

wenn die numerische Rechnung auf r Dezimalen genau durchgeführt werden soll.

Mit den im Punkt (x_1, y_1) aufgestellten Reihen (2.2.5) hat man eine analytische Fortsetzung der gesuchten Lösungskurve durch (x_0, y_0) gefunden und kann gemäß Satz 2.2 für jeden Wert

$$t = t_2 , \quad 0 < t_2 < t^*(x_1, y_1) , \tag{2.4.9}$$

wobei $t^*(x_1, y_1)$ aus (2.3.11) zu bestimmen ist, einen neuen Punkt

$$x_2 = X(t_1 + t_2) , \qquad y_2 = Y(t_1 + t_2)$$

berechnen. Die Fehler von x_2, y_2 sind mit Hilfe von (2.4.7) abzuschätzen. Allgemein erhält man aus (2.4.7) für die Fehler δx_{r+1}, δy_{r+1} eines nach $(r+1)$ Schritten berechneten Punktes (x_{r+1}, y_{r+1}) die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} |\delta x_{r+1}| \leqq \overline{\delta x_{r+1}} &= \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\delta c^\nu}(\bar{x}_r, \bar{y}_r, \delta x_r, \delta y_r; t_r) + \overline{R_n^*}(\bar{x}_r + \delta x_r, \bar{y}_r + \delta y_r; t_r) + \delta_0 , \\ |\delta y_{r+1}| \leqq \overline{\delta y_{r+1}} &= \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\delta d^\nu}(\bar{x}_r, \bar{y}_r, \delta x_r, \delta y_r; t_r) + \overline{R_n^*}(\bar{x}_r + \delta x_r, \bar{y}_r + \delta y_r; t_r) + \delta_0 . \end{aligned}\right\} \tag{2.4.10}$$

Statt der gesuchten Lösung liefert das angegebene Verfahren eine Näherungslösung. Die Aufgabenstellung vom Anfang dieses Abschnitts muß präzisiert werden: Gesucht sei eine Näherungslösung $\bar{X}(t)$, $\bar{Y}(t)$, $0 \leqq t \leqq T_0$, mit $\bar{X}(0) = x_0$, $\bar{Y}(0) = y_0$, die von der exakten Lösungskurve $X(t)$, $Y(t)$ des Systems (1.0.1) durch einen beliebig vorgegebenen Punkt (x_0, y_0) um weniger als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ abweicht:

$$|X(t) - \bar{X}(t)| < \varepsilon , \qquad |Y(t) - \bar{Y}(t)| < \varepsilon , \qquad 0 \leqq t \leqq T_0 . \tag{2.4.11}$$

Das gesuchte Kurvenstück liege im Gebiet $\mathfrak{G}$ der x, y-Ebene. Die Konstanten C und β des majoranten Operators Δ seien so bestimmt, daß die Ungleichungen (2.3.8) für alle Punkte $(x = x_0, y = y_0)$ von $\mathfrak{G}$ erfüllt sind. Damit erhält man aus (2.3.11) eine einheitliche Konvergenzschranke t^* für die Lie-Reihen-Entwicklung in jedem beliebigen Punkt von $\mathfrak{G}$ und aus (2.3.15) bzw. (2.3.18) einheitliche Schranken R_n^* bzw. $\overline{R}_n$ für die Restglieder solcher Entwicklungen. Mit Hilfe der im ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$ gültigen Konvergenzschranke t^* kann man leicht eine obere Schranke r^* für die Anzahl der analytischen Fortsetzungen ableiten, die für die Berechnung des gesuchten Kurvenstückes im Intervall $0 \leqq t \leqq T_0$ notwendig sind:

$$r^* = \left[\frac{T_0}{\vartheta t^*}\right], \qquad 0 < \vartheta < 1 . \tag{2.4.12}$$

Dabei bezeichnet die eckige Klammer das größte Ganze des Quotienten. Das erste Funktionselement, das durch die an der Stelle (x_0, y_0) entwickelten Lie-Reihen (2.1.6) bestimmt worden war, kann also durch die an der Stelle $(X(\vartheta\, t^*) = x_1,\ Y(\vartheta\, t^*) = y_1)$ entwickelten Reihen (2.1.6) analytisch fortgesetzt werden, usw., so daß man nach r^*-maliger Wiederholung des Verfahrens zu einem Funktionselement gelangt, das durch die an der Stelle $(X(r^*\ \vartheta t^*) = x_{r^*},\ Y(r^*\ \vartheta t^*) = y_{r^*})$ entwickelten Lie-Reihen (2.1.6) definiert wird und den Endpunkt $(X(T_0) = x_{r^*+1},\ Y(T_0) = y_{r^*+1})$ der gesuchten Kurve enthält. Führt man die Rechnung tatsächlich durch, so kann man bei jedem Schritt die Rekursionsformeln (2.4.10) benutzen und auf diese Art und Weise Schranken für die Fehler

$$\delta x_{T_0} = \delta x_{r^*+1} , \qquad \delta y_{T_0} = \delta y_{r^*+1} \tag{2.4.13}$$

bestimmen. Will man dagegen vor dem Beginn der schrittweisen Berechnung wissen, wie groß die Fehler (2.4.13) sein werden, wenn man die Reihen (2.1.6) jeweils nach n Gliedern

abbricht und außerdem bei jedem Schritt Abrundungsfehler begeht, so benötigt man einen geschlossenen Ausdruck für die Schranken der Fehler (2.4.13) und zu dessen Herleitung eine Abschätzung der Fehler δc^ν, δd^ν der ersten n Koeffizienten. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt[1])

$$\left.\begin{aligned} c^\nu(\bar{x}+\delta x, \bar{y}+\delta y; t) - c^\nu(\bar{x}, \bar{y}; t) &= \delta c^\nu(\bar{x}, \bar{y}, \delta x, \delta y; t) = \\ = \delta x\, c^\nu_x(\bar{x}+\vartheta'\,\delta x, \bar{y}+\vartheta'\,\delta y; t) + \delta y\, c^\nu_y(\bar{x}+\vartheta'\,\delta x, \bar{y}+\vartheta'\,\delta y; t)&, \\ 0 < \vartheta' < 1&. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.14}$$

Dabei ist ϑ' eine nicht näher bestimmte reelle Zahl zwischen 0 und 1. Nach Satz 2.3 können die Koeffizienten

$$c^\nu_x = \frac{t^\nu}{\nu!}\frac{\partial}{\partial x} D^\nu(\bar{x}+\delta x), \qquad c^\nu_y = \frac{t^\nu}{\nu!}\frac{\partial}{\partial y} D^\nu(\bar{x}+\delta x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

in der Umgebung (2.4.8) des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$ durch

$$\frac{t^\nu}{\nu!}\frac{d}{dz} \Delta^\nu(|x|+z)$$

majorisiert werden; es ergibt sich also

$$|\delta c^\nu(\bar{x}, \bar{y}, \delta x, \delta y; t)| \leqq \overline{\delta c^\nu} = (\overline{\delta x} + \overline{\delta y})\frac{t^\nu}{\nu!}\frac{d}{dz}\Delta^\nu(|\bar{x}|+z) \tag{2.4.15}$$

und mit (2.3.9)

$$\overline{\delta c^\nu} = (\overline{\delta x} + \overline{\delta y})\frac{t^\nu}{\nu!} m\,(2m-1)\ldots[\nu\cdot(m-1)+1]\,C^\nu(z+\beta)^{\nu(m-1)}. \tag{2.4.16}$$

Mit

$$\frac{\varrho\,(m-1)+1}{\varrho} = m - 1 + \frac{1}{\varrho} \leqq m, \qquad \varrho = 1, 2, \ldots,$$

folgt weiter

$$\overline{\delta c^\nu} \leqq (\overline{\delta x} + \overline{\delta y})\,[m\,t\,C\,(z+\beta)^{m-1}]^\nu. \tag{2.4.17}$$

Berücksichtigt man, daß wegen (2.4.3)

$$|\delta c^0| = |\delta x| \leqq \overline{\delta x}$$

ist, so gilt für

$$t \leqq t' < \frac{1}{m\,C\,(z+\beta)^{m-1}} \tag{2.4.18}$$

die Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n}\overline{\delta c^\nu} \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{\delta c^\nu} \leqq \frac{\overline{\delta x} + \overline{\delta y}}{1 - t'\,m\,C\,(z+\beta)^{m-1}} = (\overline{\delta x} + \overline{\delta y})\cdot M \tag{2.4.19}$$

und entsprechend

$$\sum_{\nu=0}^{n}\overline{\delta d^\nu} \leqq (\overline{\delta x} + \overline{\delta y})\cdot M. \tag{2.4.20}$$

Ist in (2.4.10) für alle $r = 0, 1, 2, \ldots$ stets $t_{r+1} \leqq t'$, und gilt

$$z = z_r \geqq \overline{\delta x_r}, \overline{\delta y_r}\ (z_0 = 0),$$

so ergibt sich für die Fehlerschranken $\overline{\delta x_{r+1}}$, $\overline{\delta y_{r+1}}$ aus (2.4.10) und (2.4.19), (2.4.20) die Abschätzung

$$\left.\begin{aligned} \overline{\delta x_{r+1}} &\leqq (\overline{\delta x_r} + \overline{\delta y_r})\cdot M + R^*_n + \delta_0, \\ \overline{\delta y_{r+1}} &\leqq (\overline{\delta x_r} + \overline{\delta y_r})\cdot M + R^*_n + \delta_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.21}$$

[1]) Die folgenden Untersuchungen beziehen sich nur auf c^ν bzw. δc^ν, Sie gelten jedoch ebenso für d^ν, δd^ν, wenn man in den Formeln c mit d vertauscht.

Addiert man beide Gleichungen, so folgt die Rekursionsformel

$$\overline{\delta x}_{r+1} + \overline{\delta y}_{r+1} \leqq 2\,M\,(\overline{\delta x}_r + \overline{\delta y}_r) + 2\,(R_n^* + \delta_0)\,, \qquad r = 0, 1, \ldots, \tag{2.4.22}$$

und daraus für $r = r^*$ ein geschlossener Ausdruck für die Schranken der Fehler (2.4.13):

$$\overline{\delta x}_{r^*+1} + \overline{\delta y}_{r^*+1} \leqq \sum_{\varrho=0}^{r^*} (2\,M)^\varrho \cdot 2\,(R_n^* + \delta_0)\,,$$

$$\overline{\delta x}_{T_0} + \overline{\delta y}_{T_0} \leqq \frac{(2\,M)^{r^*+1} - 1}{2\,M - 1}\,2\,(R_n^* + \delta_0)\,. \tag{2.4.23}$$

Der Endpunkt $(\bar{x}_{T_0}, \bar{y}_{T_0})$ der gewonnenen Näherungslösung $\bar{X}(t)$, $\bar{Y}(t)$ weicht demnach vom Endpunkt (x_{T_0}, y_{T_0}) der exakten Lösung um weniger als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ab, wenn

$$\frac{(2\,M)^{r^*+1} - 1}{2\,M - 1}\,2(R_n^* + \delta_0) < \varepsilon \tag{2.4.24}$$

ist. Das läßt sich immer erreichen, da einerseits die Restgliedschranken R_n^* bzw. $\overline{R}_n$ beliebig klein gemacht werden können, indem man n hinreichend groß wählt, d. h. in den abgebrochenen Lie-Reihen-Entwicklungen hinreichend viele Anfangsglieder mitnimmt, und andrerseits die Schranke der Abrundungsfehler um so kleiner wird, je mehr Ziffernstellen bei der Rechnung mitgeführt werden. Aus den Ungleichungen (2.4.21), (2.4.23) geht hervor, daß die Fehlerschranken beim Übergang vom r-ten zum $(r+1)$-ten Schritt monoton zunehmen. Demzufolge sind mit den Fehlern des Endpunktes auch die Fehler sämtlicher Zwischenpunkte kleiner als ε, d. h., die Näherungslösung weicht im gesamten Intervall

$$0 \leqq t \leqq T_0 \tag{2.4.25}$$

von der exakten Lösung um weniger als ε ab. Es gilt also folgender

Satz 2.5. *Wenn* 1. *die Lösungskurve* $X(t)$, $Y(t)$ *des Systems* (1.0.1) *durch den Anfangspunkt* $(X(0) = x_0,\ Y(0) = y_0)$ *in dem* t*-Intervall* (2.4.25) *ganz in dem endlichen Gebiet* $\mathfrak{G}$ *der* x,y*-Ebene bleibt,* 2. *die Konstanten* C *und* β *so gewählt sind, daß die Abschätzungen* (2.3.8) *für alle Punkte von* $\mathfrak{G}$ *erfüllt sind,* 3. *bei jedem Schritt* $t_{r+1} \leqq t', z \geqq \overline{\delta x}_r, \overline{\delta y}_r$ *ist und* 4. *die Anzahl* n *der in den* Lie*-Reihen-Entwicklungen mitgeführten Reihenglieder und die Anzahl der bei der Berechnung mitgenommenen Ziffernstellen so gewählt werden, daß* (2.4.24) *erfüllt ist, so liefert das angegebene Verfahren der* Lie*-Reihen-Entwicklung und analytischen Fortsetzung in endlich vielen Schritten eine Näherungslösung* $\bar{X}(t)$, $\bar{Y}(t)$ *durch den Punkt* (x_0, y_0), *die von der exakten Lösung um weniger als ein vorgegebenes* $\varepsilon > 0$ *abweicht, d. h., es gilt* (2.4.11).

Abb. 2.1 veranschaulicht den Sachverhalt in der Phasenebene. Die Näherungskurve $\bar{X}(t)$, $\bar{Y}(t)$, $0 \leqq t \leqq T_0$, ist mit $\bar{\mathfrak{C}}$ bezeichnet. Der zu einem beliebigen festen t-Wert aus dem Inter-

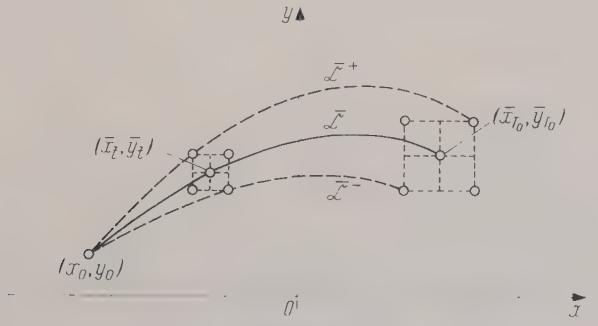

Abb. 2.1

vall (2.4.25) gehörende Punkt $P \sim (X(t) = x_t,\ Y(t) = y_t)$ der exakten Kurve $\mathfrak{C}$ weicht von dem Punkt $\overline{P} \sim (\overline{X}(t) = \overline{x}_t,\ \overline{Y}(t) = \overline{y}_t)$ in x-Richtung höchstens um $\overline{\delta x}_t$ und in y-Richtung höchstens um $\overline{\delta y}_t$ ab:

$$|x_t - \overline{x}_t| \leqq \overline{\delta x}_t\,, \qquad |y_t - \overline{y}_t| \leqq \overline{\delta y}_t\,.$$

Dabei bezeichnen $\overline{\delta x}_t$, $\overline{\delta y}_t$ wieder die oberen Schranken der Fehler δx_t, δy_t. Der Punkt P befindet sich also in dem „Fehlerrechteck" mit den Seitenlängen $2\,\overline{\delta x}_t$, $2\,\overline{\delta y}_t$ und dem Mittelpunkt $\overline{P}$. Der größtmögliche Abstand zwischen P und $\overline{P}$ beträgt demnach

$$r(t) = \sqrt{\overline{\delta x}_t^{\,2} + \overline{\delta y}_t^{\,2}}\,. \tag{2.4.26}$$

Denkt man sich um jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{C}}$ das zugehörige Fehlerrechteck gezeichnet, so bildet die Gesamtheit aller Rechtecke den in Abb. 2.1 angegebenen Streifen. Die dem singulären Punkt (0, 0) abgewandte Randkurve ist dabei mit $\overline{\mathfrak{C}}^{+}$, die anderen mit $\overline{\mathfrak{C}}^{-}$ bezeichnet. Die exakte Lösungskurve liegt in dem „Fehlerstreifen" zwischen $\overline{\mathfrak{C}}^{+}$ und $\overline{\mathfrak{C}}^{-}$. Sie beginnt im Punkt (x_0, y_0) und endet in einem Punkt des eingezeichneten Fehlerrechtecks mit dem Mittelpunkt $(\overline{x}_{T_0}, \overline{y}_{T_0})$ und den Seitenlängen $2\,\overline{\delta x}_{T_0}$, $2\,\overline{\delta y}_{T_0}$. Da

$$\sqrt{\overline{\delta x}_{T_0}^{\,2} + \overline{\delta y}_{T_0}^{\,2}} \leqq \overline{\delta x}_{T_0} + \overline{\delta y}_{T_0} < \varepsilon$$

ist, weicht $\mathfrak{C}$ im Intervall (2.4.25) also, wie oben gezeigt, um weniger als ε von $\overline{\mathfrak{C}}$ ab.

Bemerkung 2.1. Der Ausdruck (2.4.24) ist nur insofern von Bedeutung, als mit seiner Hilfe der Satz 2.5 aufgestellt wurde, wonach durch Erhöhung der Anzahl der berechneten Reihenglieder und Dezimalen die Fehler (2.4.13) beliebig klein gemacht werden können. Für praktische Anwendungen ist der Ausdruck dagegen nicht geeignet, da er eine sehr grobe Schranke darstellt. Benötigt man eine schärfere Abschätzung der Fehler (2.4.13), so empfiehlt es sich, die Rekursionsformeln (2.4.10) zu benutzen.

2.5. Bestimmung der periodischen Lösung

Wir betrachten irgendeine Lösungskurve $\mathfrak{C}_1$ im Einzugsgebiet des Grenzzyklus $\mathfrak{C}$; sie windet sich spiralförmig um ihn, so daß wir ohne Einschränkung voraussetzen können, ihr Anfangspunkt (x_0, y_0) liege auf der positiven x-Achse: $x_0 > 0$, $y_0 = 0$; der nächste Schnittpunkt mit dieser sei $(x_1, 0)$. Ist $x_1 = x_0$, so ist $\mathfrak{C}_1$ der gesuchte Grenzzyklus $\mathfrak{C}$; ist dagegen $x_1 < x_0$, so liegt $\mathfrak{C}$ im Inneren der durch $\mathfrak{C}_1$ und die Strecke $x_1 \leqq x \leqq x_0$ gebildeten geschlossenen Kurve. Durch Wahl einer hinreichend kleinen Anfangsabszisse $x_2 > 0$ läßt sich dann ein Punkt $(x_2, 0)$ derart finden, daß die durch ihn verlaufende Kurve $\mathfrak{C}_2$ in Richtung zunehmender t-Werte den Schnittpunkt $(x_3, 0)$ mit der positiven x-Achse hat, wobei $x_2 < x_3 < x_1$ ist. Der Grenzzyklus liegt außerhalb der durch $\mathfrak{C}_2$ und die Strecke $x_2 \leqq x \leqq x_3$ gebildeten geschlossenen Kurve. Er muß also in dem Ringgebiet zwischen den beiden Kurvenzügen

$$\mathfrak{C}_1,\ x_1 \leqq x \leqq x_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}_2,\ x_2 \leqq x \leqq x_3$$

liegen (Abb. 2.2) und die positive x-Achse in einem Punkt $(x_a, 0)$ mit $x_3 < x_a < x_1$ schneiden. (Ist $x_1 > x_0$, so nimmt man $\mathfrak{C}_1$ und die Strecke $x_0 \leqq x \leqq x_1$ als Innenkurve und findet durch Wahl einer hinreichend großen Anfangsabszisse $x_2 > x_1$ eine Außenkurve $\mathfrak{C}_2$, $x_3 \leqq x \leqq x_2$.)

Statt der zunächst angenommenen exakten Konstruktion von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ liefert das in den vorangegangenen Abschnitten beschriebene Verfahren der Lie-Reihen-Entwicklung und analytischen Fortsetzung jedoch nur Näherungskurven $\overline{\mathfrak{C}}_1$ und $\overline{\mathfrak{C}}_2$, deren Schnittpunkte $(x_1, 0)$ und $(x_3, 0)$ mit der positiven x-Achse von denjenigen der exakten Kurve $(x_1, 0)$, $(x_3, 0)$ um Fehler δx_1, δx_3 abweichen (Abb. 2.3). Die oben beschriebene Konstruktion des Ring-

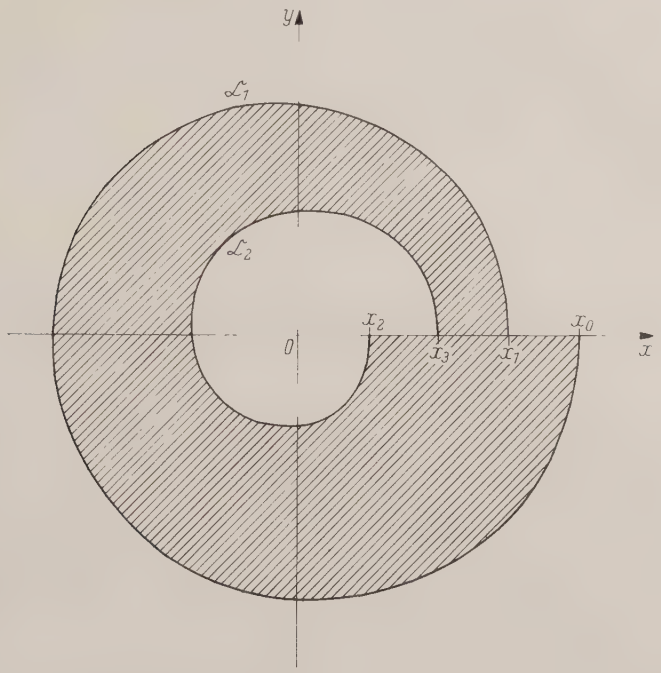

Abb. 2.2

gebietes für den Grenzzyklus muß dies berücksichtigen: Wie im Abschnitt 2.4 für $\bar{\mathfrak{C}}$ konstruiert man für die Näherungskurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ Fehlerstreifen (und bezeichnet deren Randkurven mit $\bar{\mathfrak{C}}_1^-$, $\bar{\mathfrak{C}}_1^+$ bzw. mit $\bar{\mathfrak{C}}_2^-$, $\bar{\mathfrak{C}}_2^+$), die über die Punkte $(\bar{x}_1, 0)$ bzw. $(\bar{x}_3, 0)$ hinaus bis zu Punkten P_1 bzw. P_2 analytisch fortgesetzt werden, deren Fehlerrechtecke ganz unterhalb der x-Achse liegen (vgl. Abb. 2.3). Die durch $(x_0, 0)$ bzw. $(x_2, 0)$ verlaufenden exakten Lösungskurven $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ schneiden dann die positive x-Achse in den Intervallen

$$x_1^- \leqq x \leqq \bar{x}_1^+ \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}_3^- \leqq x \leqq \bar{x}_3^+ .$$

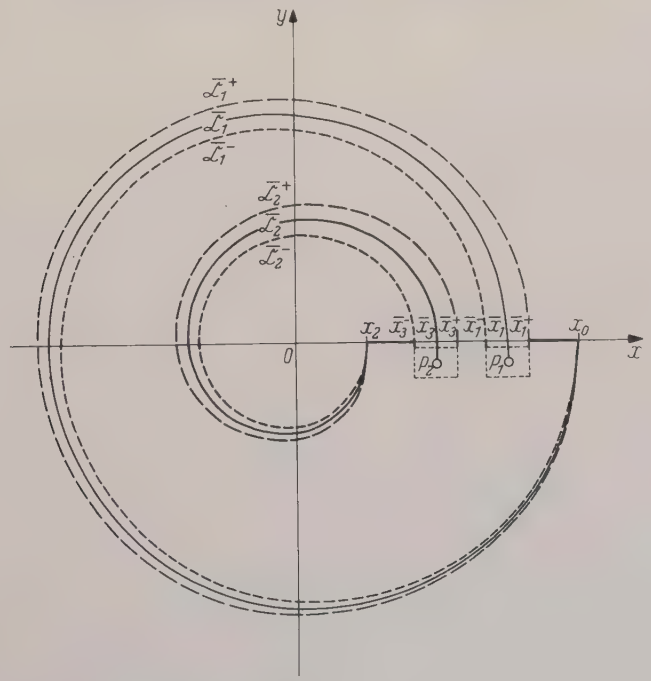

Abb. 2.3

Dabei sind die Abszissen der Schnittpunkte von $\overline{\mathfrak{C}}_1^-$ $\overline{\mathfrak{C}}_1^+$, $\overline{\mathfrak{C}}_2^-$, $\overline{\mathfrak{C}}_2^+$ mit der positiven x-Achse bzw. mit $\overline{x}_1^-$, $\overline{x}_1^+$, $\overline{x}_3^-$, $\overline{x}_3^+$ bezeichnet. Daraus ergibt sich der folgende

Satz 2.6. *Liegen* $(x_0, 0)$ *und* $(x_2, 0)$ *im Einzugsgebiet des Grenzzyklus, haben die durch sie verlaufenden Näherungskurven* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *und die Randkurven* $\overline{\mathfrak{C}}_1^-$, $\overline{\mathfrak{C}}_1^+$, $\overline{\mathfrak{C}}_2^-$, $\overline{\mathfrak{C}}_2^+$ *ihrer Fehlerstreifen die Schnittpunkte* $(\overline{x}_1, 0)$, $(\overline{x}_3, 0)$, $(\overline{x}_1^-, 0)$, $(\overline{x}_1^+, 0)$, $(\overline{x}_3^-, 0)$, $(\overline{x}_3^+, 0)$ *mit der positiven x-Achse und ist*

$$x_2 < \overline{x}_3^- < \overline{x}_1^+ < x_0 \,, \tag{2.5.1}$$

so liegt der Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ *in dem Ringgebiet, das durch* $\overline{\mathfrak{C}}_2^-$, *und das Abszissenstück* $x_2 \leqq x \leqq \overline{x}_3^-$ *von innen und durch* $\overline{\mathfrak{C}}_1^+$ *und* $\overline{x}_1^+ \leqq x \leqq x_0$ *von außen begrenzt wird und schneidet die x-Achse in einem Punkt* $(x_a, 0)$ *mit*

$$\overline{x}_3^- < x_a < \overline{x}_1^+ \,. \tag{2.5.2}$$

Bemerkung 2.2. Man kann die angegebene Methode leicht auf die Fälle ausdehnen, die zu Beginn ausgeschlossen wurden: Hat das System (1.0.1) einen instabilen Grenzzyklus, so setzt man $t = -\overline{t}$ und hat den bisherigen Fall. Existieren mehrere Grenzzyklen, aber in jedem endlichen Gebiet nur endlich viele, so ist die Methode prinzipiell auch anwendbar. Es sind dann allerdings zusätzliche Überlegungen nötig, da auch halbstabile Grenzzyklen auftreten können. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

3. Anwendung auf die van der Polsche Differentialgleichung

Die van der Polsche Differentialgleichung (1.0.8) besitzt genau eine periodische Lösung, die für kleine Parameter $\mu \ll 1$ nur wenig von der „erzeugenden" Kosinusschwingung

$$X(t) = 2 \cos t \tag{3.0.1}$$

abweicht [31, 70]. In der Phasenebene entspricht der periodischen Lösung ein stabiler Grenzzyklus, dessen Einzugsgebiet die gesamte Ebene (bis auf den Ursprung) ist. Für kleine Parameterwerte weicht dieser Zyklus nach (3.0.1) nur wenig von dem Kreis

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{3.0.2}$$

ab. Die Gleichung (1.0.8) wurde als Anwendungsbeispiel für das im Kapitel 2 beschriebene Verfahren gewählt, weil ihre Lösung bereits mit anderen numerischen Verfahren für verschiedene Parameterwerte zwischen 0 und 20 berechnet wurde (vgl. Krogdahl [41], Urabe, Yanagiwara, Shinohara [75—78, 81, 82]) und die hier erzielten Ergebnisse deshalb bereits bekannten gegenübergestellt werden können.

3.1. Berechnung der Koeffizienten der Lie-Reihen

Schreibt man (1.0.8) als System der Gestalt (1.0.1), so folgt

$$P(x, y) = y\,, \qquad Q(x, y) = -x - \mu\,(x^2 - 1)\,y\,. \tag{3.1.1}$$

Der Operator D hat dann wegen (2.1.2) die Gestalt

$$D = y\,\frac{\partial}{\partial x} - [x + \mu\,(x^2 - 1)\,y]\,\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{3.1.2}$$

so daß man aus (2.2.1) die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
D^0 x &= x\,,\\
D^1 x &= P = y\,,\\
D^2 x &= Q\,P_y = -x - \mu\,(x^2 - 1)\,y\,,\\
D^3 x &= P_y\,(P\,Q_x + Q\,Q_y)\,,\\
D^4 x &= P_y\,(P^2\,Q_{xx} + P\,Q_x\,Q_y + 2\,P\,Q\,Q_{xy} + Q\,P_y\,Q_x + Q\,Q_y^2)\,,\\
D^5 x &= P_y\,(P^2\,Q_{xxx}\,Q_y + 3\,P^2\,Q_x\,Q_{xy} + 3\,P^2\,Q\,Q_{xxy}\\
&\quad + P\,Q_x^2\,P_y + 3\,P\,Q\,P_y\,Q_{xx} + P\,Q_x\,Q_y^2 + 5\,P\,Q\,Q_y\,Q_{xy}\\
&\quad + 2\,Q\,P_y\,Q_x\,Q_y + 3\,Q^2\,P_y\,Q_{xy} + Q\,Q_y^3)\,,\\
D^6 x &= P_y\,(4\,P^3\,Q_{xxx}\,Q_{xy} + 6\,P^3\,Q_x\,Q_{xxy} + 5\,P^2\,Q_x\,Q_{xx}\,P_y\\
&\quad + P^2\,Q_{xx}\,Q_y^2 + 7\,P^2\,Q_x\,Q_y\,Q_{xy} + 8\,P^2\,Q\,Q_{xy}^2\\
&\quad + 9\,P^2\,Q\,Q_y\,Q_{xxy} + 2\,P\,Q_x^2\,P_y\,Q_y + 7\,P\,Q\,P_y\,Q_{xx}\,Q_y\\
&\quad + 16\,P\,Q\,P_y\,Q_x\,Q_{xy} + 12\,P\,Q^2\,P_y\,Q_{xxy} + P\,Q_x\,Q_y^3\\
&\quad + 9\,P\,Q\,Q_y^2\,Q_{xy} + Q\,P_y^2\,Q_x^2 + 3\,Q^2\,P_y^2\,Q_{xx}\\
&\quad + 3\,Q\,P_y\,Q_x\,Q_y^2 + 13\,Q^2\,P_y\,Q_y\,Q_{xy} + Q\,Q_y^4)\,, \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

erhält. Die Koeffizienten für die y-LIE-Reihe sind wegen

$$\left.\begin{aligned} D^0\, y &= y\,, \\ D^1\, y &= Q = -\,x - \mu\,(x^2 - 1)\,y \end{aligned}\right\} \tag{3.1.4}$$

mit Hilfe der Formel

$$D^\nu\, y = P_y\, D^{\nu-1}\, x\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{3.1.5}$$

aus den Koeffizienten der x-LIE-Reihe zu bestimmen. Sollten höhere Koeffizienten $D^\nu\, x$ ($\nu > 6$) benötigt werden, so benutzt man zweckmäßig die Rekursion (2.2.7).

3.2. Konvergenz der LIE-Reihen

Die Konstanten C und β für den majoranten Operator Δ sind aus den Ungleichungen (2.3.8) zu bestimmen, die im Fall der VAN DER POLschen Differentialgleichung wegen (3.1.1) die Gestalt

$$|y_0| + |x_0 + \mu\,(x_0^2 - 1)\,y_0| \leqq C\,\beta^3\,, \tag{3.2.1}$$

$$1 + |1 + 2\,\mu\,x_0\,y_0 + \mu\,(x_0^2 - 1)| \leqq 3\,C\,\beta^2\,, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{1}{2}\,|2\,\mu\,y_0 + 4\,\mu\,x_0| \leqq 3\,C\,\beta\,, \tag{3.2.3}$$

$$\frac{1}{6}\,6\,\mu \leqq C \tag{3.2.4}$$

haben. Aus (3.2.4) ergibt sich, daß man

$$C = \mu \tag{3.2.5}$$

wählen kann. Benutzt man in (3.2.1)—(3.2.3) das Gleichheitszeichen und löst nach β auf, so erhält man die drei Werte

$$\beta_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{\mu}\,[|y_0| + |x_0 + \mu\,(x_0^2 - 1)\,y_0|]}\,, \tag{3.2.6}$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{1}{3\,\mu}\,[1 + |1 + 2\,\mu\,x_0\,y_0 + \mu\,(x_0^2 - 1)|]}\,, \tag{3.2.7}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{3}\,[|y_0| + 2\,|x_0|]\,. \tag{3.2.8}$$

Wählt man nun

$$\beta = \max\,(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\,, \tag{3.2.9}$$

so sind alle drei Ungleichungen (3.2.1)—(3.2.3) erfüllt. Die im Punkt (x_0, y_0) entwickelten LIE-Reihen konvergieren also nach Satz 2.4 für

$$t < t^*(x_0, y_0) = \frac{1}{2\,\mu\,(z + \beta)^2} \tag{3.2.10}$$

in der Umgebung

$$|x - x_0| \leqq z\,, \qquad |y - y_0| \leqq z \tag{3.2.11}$$

des Punktes (x_0, y_0). Im Punkt selbst sind die Reihen für

$$t < \frac{1}{2\,\mu\,\beta^2} \tag{3.2.12}$$

konvergent. Für das Restglied der nach dem n-ten Glied abgebrochenen LIE-Reihen erhält man aus (2.3.15) bzw. (2.3.18)

$$R_n \leqq R_n^* = \frac{2^n\,\mu^{n+1}(z + \beta)^{2n+3}\,t^{n+1}}{1 - 2\,\mu\,(z + \beta)^2\,t} \tag{3.2.13}$$

bzw.

$$R_n \leqq \overline{R}_n = \frac{3 \cdot 5 \times \cdots \times (2\,n + 1)\,\mu^{n+1}(z + \beta)^{2n+3}\,t^{n+1}}{(n + 1)!\,[1 - 2\,\mu\,(z + \beta)^2\,t]}\,. \tag{3.2.14}$$

3.3. Näherungslösungen ohne Fehlerabschätzung

Zu einer ersten Orientierung über die Gestalt des Grenzzyklus in Abhängigkeit vom Parameter μ wurden auf dem Rechenautomat ZRA 1 Näherungslösungen durch den Anfangspunkt

$$X(0) = 2\,, \qquad Y(0) = 0 \tag{3.3.1}$$

für die Parameterwerte

$$\mu = 0(0{,}5)1(1)10(10)20 \tag{3.3.2}$$

berechnet. Die LIE-Reihen-Entwicklungen wurden dabei durchweg nach dem fünften Glied abgebrochen, d. h., es galt stets

$$n = 5\,. \tag{3.3.3}$$

Die Koeffizienten wurden mit Hilfe der expliziten Formeln (3.1.3) berechnet. Die Schrittweite t_r wurde so gewählt, daß jeweils (3.2.12) erfüllt und das Restglied kleiner als die Hälfte der letzten mitgeführten Dezimalstelle war. Wurde bei der punktweisen Berechnung ein Schnittpunkt mit der Abszisse oder ein Extremum der Phasenkurve überschritten, so wurde der fragliche Punkt mit Hilfe der Regula falsi iterativ angenähert. Aus (1.0.8) erhält man für die Phasenkurve die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \mu\,(x^2 - 1)\,y}{y}\,. \tag{3.3.4}$$

Als Kriterium für das Überschreiten eines Extremwertes wurde deshalb der Vorzeichenwechsel des Ausdrucks

$$-Q(x, y) = x + \mu\,(x^2 - 1)\,y \tag{3.3.5}$$

benutzt. Ausgehend vom Anfangspunkt ($x_0 = 2$, $y_0 = 0$), wurde die Näherungskurve $\mathfrak{C}$ durch LIE-Reihen-Entwicklung und analytische Fortsetzung stückweise bis zum ersten Schnittpunkt mit der negativen x-Achse berechnet. Dieser Schnittpunkt (x_0, 0) wurde als neuer Anfangspunkt (x_0, y_0) genommen und $\overline{\mathfrak{C}}$ bis zum nächsten Schnittpunkt mit der posi-

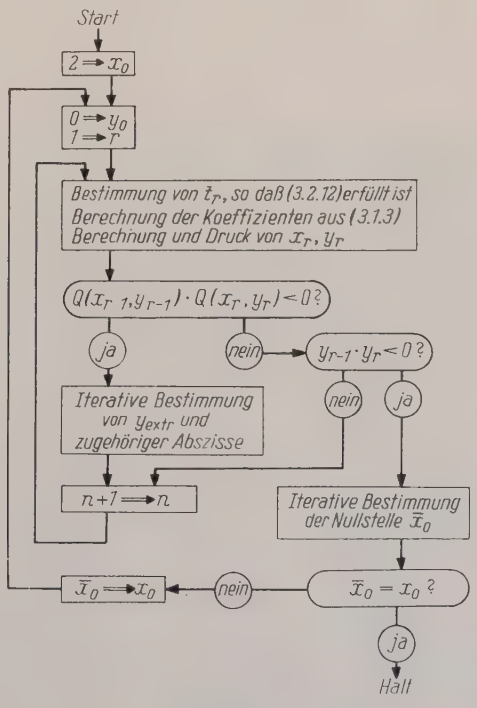

Abb. 3.1

tiven x-Achse fortgesetzt, usw. Nach einigen Schritten unterschieden sich die Beträge der Abszissen zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte im Rahmen der Rechengenauigkeit nicht mehr, d. h., die Näherungskurve $\overline{\mathfrak{C}}$, die anfänglich die Gestalt einer Spirale gehabt hatte, lief in sich selbst zurück. Das zwischen den beiden letzten x-Achsenschnitten liegende Stück von $\overline{\mathfrak{C}}$ konnte also als Approximation für den in einer Halbebene liegenden Teil des Grenzzyklus angesehen werden. Die andere Hälfte ergab sich durch Spiegelung des bereits bestimmten Kurvenbogens am Nullpunkt, denn die Phasenbahnen der Differentialgleichung

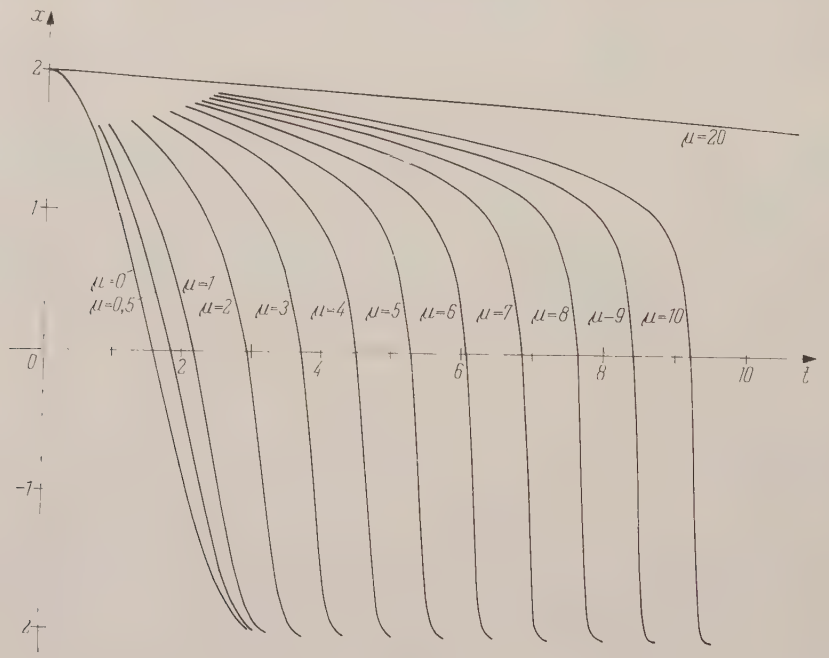

Abb. 3.2

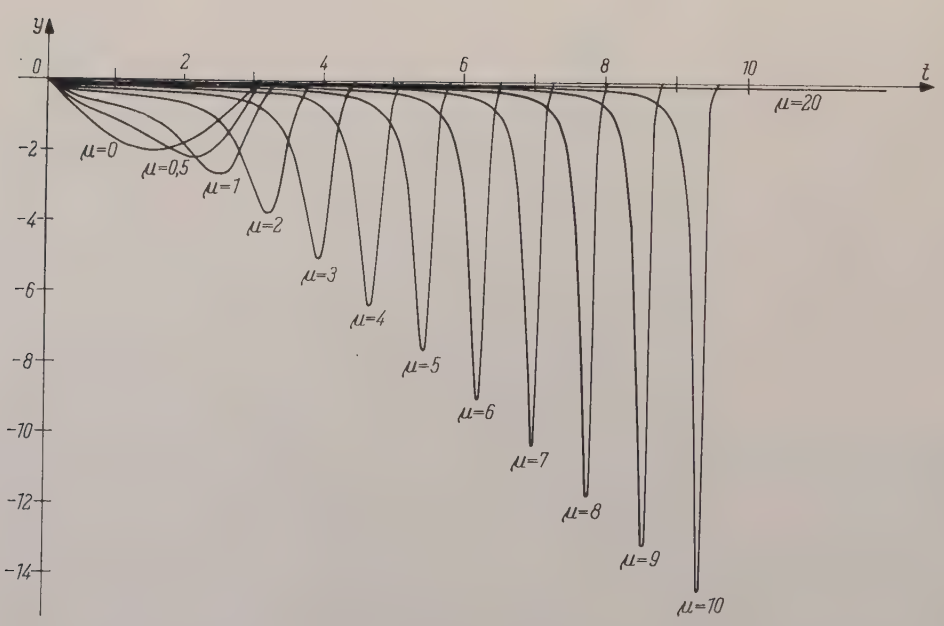

Abb. 3.3

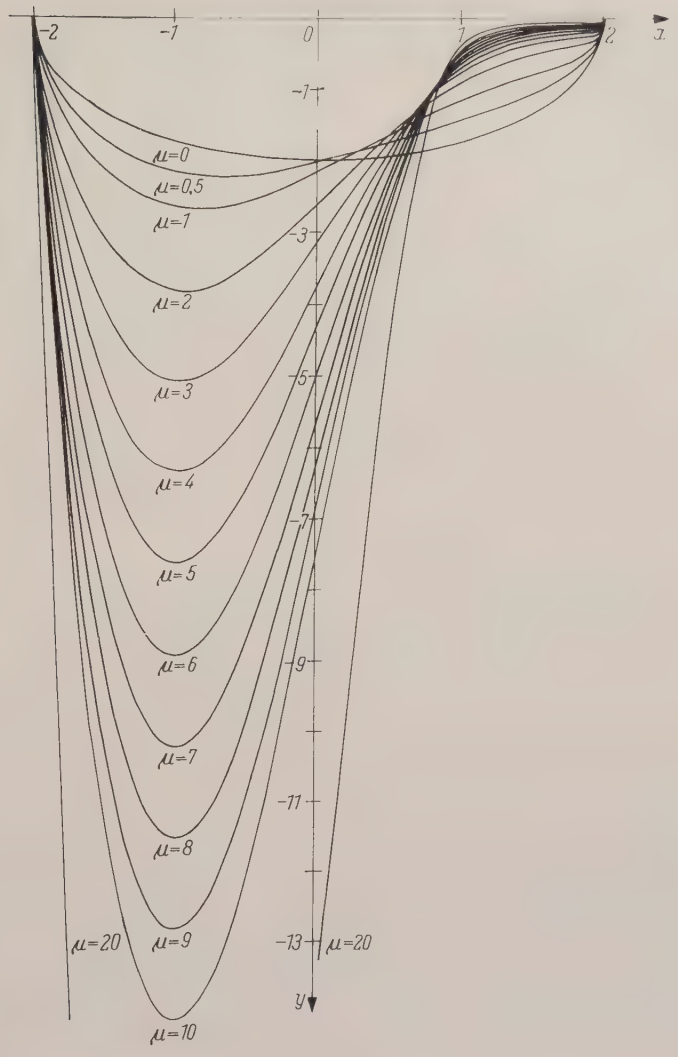

Abb. 3.4

Tabelle 1

	x_0			$T/2$		
μ	Lie-Reihe	Krogdahl	Urabe	Lie-Reihe	Krogdahl	Urabe
0	2,000 000	2,000 00	2,000 0	3,141 59	3,141 59	3,141 5
0,5	2,002 488	—	—	3,190 34	—	—
1	2,008 620	2,008 62	2,009	3,331 64	3,331 64	3,331 65
2	2,019 891	2,019 89	2,019 9	3,814 94	3,814 93	3,815 5
3	2,023 304	2,023 30	2,023 5	4,429 55	4,429 73	4,430 65
4	2,022 962	2,022 96	2,023 1	5,101 76	5,101 84	5,103 6
5	2,021 508	2,021 50	2,021 5	5,806 11	5,806 21	5,802 75
6	2,019 830	2,019 83	2,019 9	6,530 94	6,530 61	6,527 5
7	2,018 215	2,018 13	—	7,269 87	7,269 01	—
8	2,016 747	2,016 67	2,016 9	8,018 91	8,018 14	8,037 0
9	2,015 441	2,015 36	—	8,776 09	8,775 07	—
10	2,014 285	2,014 28	2,014 5	9,539 18	9,538 17	9,577 5
20	2,007 790	—	2,007 7	17,341 16	—	17,355 15

(1.0.8) sind, wie man leicht sieht, symmetrisch zum Nullpunkt. Der Ablauf der Rechnung ist in Abb. 3.1 schematisch dargestellt. Die Ergebnisse liegen für die Parameterwerte (3.3.2) in Tabellenform vor, und zwar wurden in jedem ganzzahligen t-Intervall vom Rechenautomat 50 Teilpunkte ausgedruckt[1]). Auf eine Wiedergabe der umfangreichen Tabellen wird an dieser Stelle verzichtet, die Ergebnisse sind lediglich graphisch dargestellt, und zwar in den Abb. 3.2 und 3.3 X bzw. Y in Abhängigkeit von t und in Abb. 3.4 die Lösung in der Phasenebene. Abb. 3.5 zeigt in stark vergrößertem Maßstab die Phasenkurven in der Umgebung ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse. In der Tabelle 1 sind die erzielten Näherungswerte für die Amplitude x_0 und die Halbperiode $T/2$[2]) den Ergebnissen von URABE [77] und KROGDAHL [41] gegenübergestellt. Tabelle 2 enthält die Koordinaten der Extrema (bezüglich $y = \dot{x}$) des Grenzzyklus in der Phasenebene.

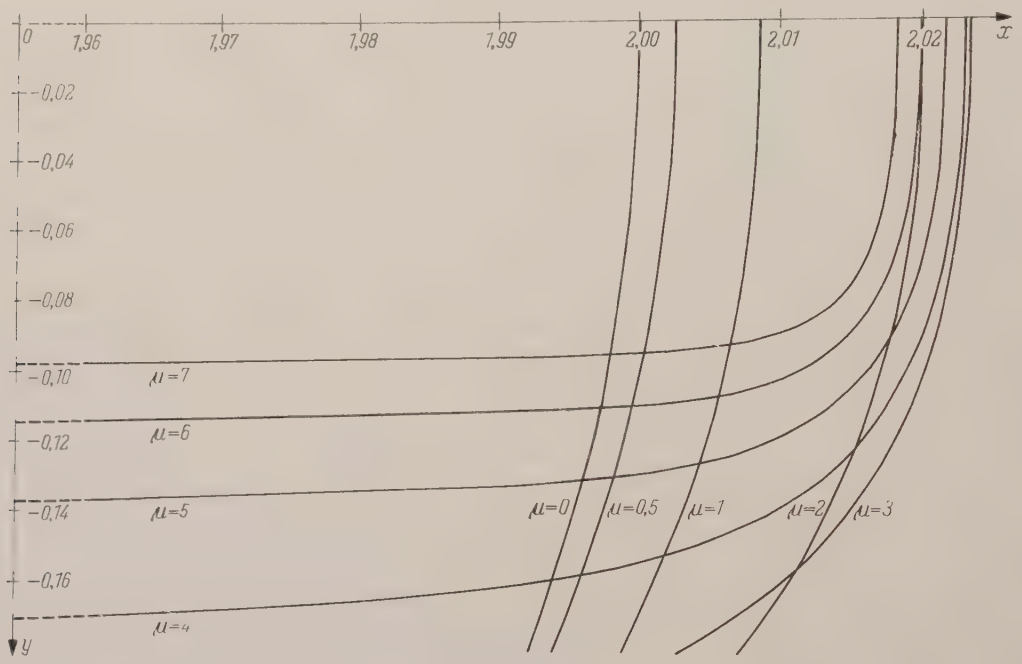

Abb. 3.5

Tabelle 2

μ	x	y	t	μ	x	y	t
0	0,000 000	2,000 000	1,570 796	6	0,990 720	8,937 927	6,207 481
0,5	0,647 152	2,226 976	2,145 851	7	0,993 051	10,243 795	6,977 426
1	0,830 599	2,678 441	2,507 564	8	0,994 605	11,553 324	7,751 644
2	0,936 650	3,817 222	3,207 493	9	0,995 691	12,865 635	8,529 292
3	0,967 635	5,064 877	3,938 618	10	0,996 480	14,180 147	9,309 758
4	0,980 491	6,344 158	4,685 737	20	0,999 088	27,390 333	17,202 484
5	0,986 992	7,637 159	5,442 991				

[1]) Zum Teil mußten wegen der Bedingung (3.2.12) noch Zwischenpunkte berechnet werden, die jedoch nicht ausgedruckt wurden.

[2]) Die Differenz der zu den beiden letzten Schnittpunkten der Phasenkurve $\overline{\mathfrak{C}}$ mit der x-Achse gehörenden t-Werte kann als Näherung für die Halbperiode $T/2$ angesehen werden. Eine Fehlerabschätzung wurde dazu nicht durchgeführt.

3.4. Berechnung eines Ringgebietes für den Grenzzyklus

Am Beispiel der periodischen Lösung von (1.0.8) mit dem Parameterwert $\mu = 1$ soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe des angegebenen Verfahrens ein Ringgebiet konstruieren kann, in dessen Inneren sich der Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ befindet. Da $\mathfrak{C}$, wie bereits erwähnt, symmetrisch bezüglich des Nullpunkts der Phasenebene ist, kann man sich bei den folgenden Betrachtungen auf eine Halbebene, etwa die obere ($y \geqq 0$), beschränken. Da die Abschätzung (2.4.24) keine praktisch verwendbaren Angaben über die Anzahl n der Reihenglieder liefert, die in den Lie-Reihen mit geführt werden müssen, um die Fehler unterhalb einer vorgegebenen Schranke ε zu halten (vgl. Bemerkung 2.1), wurde zunächst für den Teil des Grenzzyklus, der in der oberen Halbebene liegt, unter der Bedingung

$$R_n(x, y) < \varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-9} \tag{3.4.1}$$

eine Näherungskurve $\mathfrak{C}$ berechnet. Als Ausgangspunkt wurde dabei der im Abschnitt 3.3 bestimmte Näherungswert für den Schnitt des Zyklus mit der Abszisse gewählt:

$$x_0 = -\,2{,}008\;62\,, \qquad y_0 = 0\,. \tag{3.4.2}$$

Im einzelnen verlief die Rechnung folgendermaßen: Aus den Formeln (3.2.5)—(3.2.9) wurden C und β bestimmt, so daß (3.2.10) die Konvergenzschranke der Reihen in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) lieferte. Mit einem fest vorgegebenen ϑ

$$0 < \vartheta < 1 \tag{3.4.3}$$

wurde für

$$t = \vartheta\, t^* \tag{3.4.4}$$

aus der Abschätzung (3.2.13) bzw. (3.2.14) die Anzahl n der mitzuführenden Reihenglieder derart bestimmt, daß (3.4.1) erfüllt war. Im Anschluß daran wurden mit Hilfe der Rekursionsformel (2.2.7) die Koeffizienten c^ν, d^ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) und daraus für $t = \vartheta\, t^*$ neue Werte $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ berechnet, deren Fehler die Formel (2.4.10) lieferte. Für den Punkt $(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ wurden wiederum die Konstanten C und β und daraus die Konvergenzschranke t^* und die Reihengliedanzahl n bestimmt, usw. Wie im Abschnitt 3.3 wurde das Verfahren durch eine iterative Bestimmung des Maximalwertes von y unterbrochen, wenn

$$-\,Q = x + \mu\,(x^2 - 1)\,y$$

das Vorzeichen wechselte. Schließlich wurde beim Vorzeichenwechsel von y der Schnittpunkt des Grenzzyklus mit der x-Achse iterativ bestimmt. Für $\mathfrak{C}$ ergab sich der Schnittpunkt

$$\bar{x}_1 = 2{,}008\;619\;9\,, \qquad \bar{y}_1 = 0 \tag{3.4.5}$$

mit den Fehlerschranken

$$\overline{\delta x_1} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\,, \qquad \overline{\delta y_1} = 8{,}6 \cdot 10^{-5}\,. \tag{3.4.6}$$

In der Annahme, daß die Fehlerschranken von Lösungskurven durch Punkte, die nur wenig von (3.4.2) abweichen, sich nur wenig von (3.4.6) unterscheiden, wurden mit Hilfe des gleichen Verfahrens die Lösungen durch

$$x_2 = -\,2{,}008\;59\,, \qquad y_2 = 0 \tag{3.4.7}$$

und

$$x_4 = -\,2{,}008\;65\,, \qquad y_4 = 0 \tag{3.4.8}$$

bestimmt. Es ergaben sich für die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}_1$ durch (3.4.7) der Schnittpunkt

$$\bar{x}_3 = 2{,}008\;619\;0\,, \qquad \bar{y}_3 = 0$$

und für die Kurve $\mathfrak{C}_2$ durch (3.4.8) der Schnittpunkt

$$\bar{x}_5 = 2{,}008\,620\,7\,, \qquad y_5 = 0$$

mit der positiven x-Achse mit den Fehlerschranken

$$\overline{\delta x}_3 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\,, \qquad \overline{\delta y}_3 = 8{,}6 \cdot 10^{-5}$$

bzw.

$$\overline{\delta x}_5 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\,, \qquad \delta y_5 = 8{,}6 \cdot 10^{-5}\,.$$

Wie im Abschnitt 2.5 beschrieben, wurden zu $\bar{\mathfrak{C}}_1$ und $\bar{\mathfrak{C}}_2$ Fehlerstreifen berechnet. Für den Schnittpunkt $(x_3^-, 0)$ der Randkurve $\bar{\mathfrak{C}}_1^-$ mit der positiven x-Achse ergab sich

$$x_3^- = 2{,}008\,594\,,$$

also

$$|x_2| < x_3^-$$

und für den Schnittpunkt $(x_5^+, 0)$ der Randkurve $\bar{\mathfrak{C}}_2^+$

$$x_5^+ = 2{,}008\,646\,,$$

also

$$x_3^- < x_5^+ < |x_4|\,.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 2.6 erfüllt. Der in der Halbebene $y \geqq 0$ liegende Teil des Grenzzyklus $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (1.0.8) liegt im Fall $\mu = 1$ in dem Streifen zwischen $\bar{\mathfrak{C}}_1^-$ und $\bar{\mathfrak{C}}_2^+$ und schneidet die x-Achse in einem Punkt $(x_a, 0)$ mit

$$2{,}008\,594 < x_a < 2{,}008\,646\,. \tag{3.4.9}$$

Der Streifen ist in Abb. 3.6 in stark vergrößertem Maßstab in der Umgebung seiner x-Achsenschnitte dargestellt. Von den Fehlerstreifen der Kurven $\bar{\mathfrak{C}}_1$, $\bar{\mathfrak{C}}_2$ wurden nur die hier interessierenden Randkurven $\bar{\mathfrak{C}}_1^-$ und $\bar{\mathfrak{C}}_2^+$ eingezeichnet. Will man statt (3.4.9) engere Schranken für die „Amplitude" x_a des Grenzzyklus bestimmen, so ist ε_1 in (3.4.1) durch einen kleineren Wert zu ersetzen und das Verfahren zu wiederholen, wobei eine entsprechend größere Anzahl von Dezimalstellen mitzuführen ist.

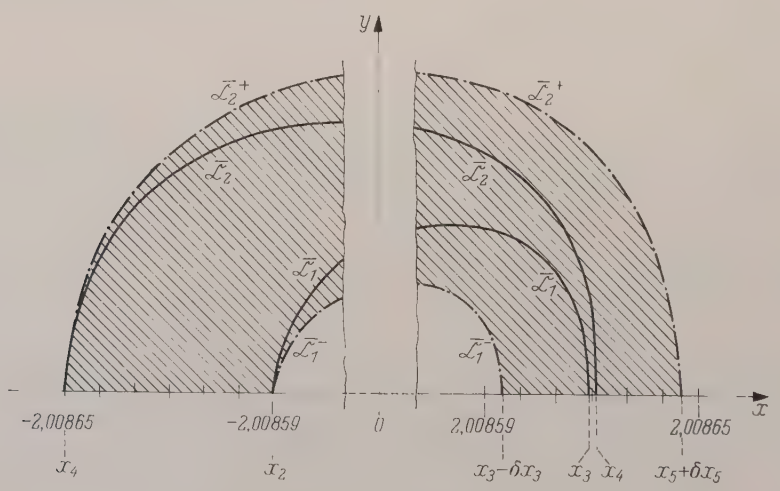

Abb. 3.6

4. Eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Lindstedt

Im Bereich kleiner Parameterwerte $\mu \ll 1$ wird vielfach die Methode von Lindstedt [47] (vgl. auch [8, 51, 52]) benutzt, um die periodische Lösung (und deren Frequenz) von Differentialgleichungen des Typs (1.0.6) in der Gestalt von Potenzreihen nach dem kleinen Parameter μ zu bestimmen. Shohat [68, 69] verallgemeinerte diese Methode, indem er Entwicklungen von Lösung $x(t)$ und Frequenz ω nach $\frac{\mu}{1+\mu}$ berechnete. Es liegt nahe, die Verallgemeinerung noch weiter zu treiben und Entwicklungen für $x(t)$ und ω in Potenzreihen nach y aufzustellen, wobei y eine Funktion des Parameters μ ist. Das Ziel ist nun, diese Funktion so zu wählen, daß die Reihenentwicklungen nach y noch für μ-Werte existieren, für die die Lindstedtschen Reihen nicht mehr konvergent sind.

4.1. Beschreibung des Verfahrens

Durch die Transformation

$$\tau = \omega\, t = \frac{2\,\pi}{T}\, t \tag{4.1.1}$$

geht die Differentialgleichung (1.0.6) über in

$$\omega^2\, x'' + x + \mu\, f(x,\, \omega\, x') = 0\,, \qquad x' = \frac{dx}{d\tau}\,. \tag{4.1.2}$$

Für die gesuchte periodische Lösung $x(\tau)$ und die Frequenz ω setzt man

$$x(\tau) = \sum_{n=e_x}^{\infty} \varphi_n(\tau)\, y^n\,, \qquad e_x \text{ ganz}\,, \tag{4.1.3}$$

$$\omega = \sum_{n=e_\omega}^{\infty} \varrho_n\, y^n\,, \qquad e_\omega \text{ ganz}\,. \tag{4.1.4}$$

Dabei ist y eine monotone Funktion von μ, die für alle $\mu \geqq 0$ definiert sei und deren Umkehrfunktion für alle in Frage kommenden y-Werte in der Form

$$\mu = \sum_{n=e_\mu}^{\infty} \alpha_n\, y^n\,, \qquad e_\mu \text{ ganz}\,, \tag{4.1.5}$$

angebbar sei. Die Funktion $x(\tau)$ hat wegen (4.1.1) die Periode $2\,\pi$, also kann man auch von den $\varphi_n(\tau)$ die Periode $2\,\pi$ fordern:

$$\varphi_n(\tau + 2\,\pi) = \varphi_n(\tau)\,, \qquad n = e_x,\, e_x + 1,\, e_x + 2,\, \ldots\,. \tag{4.1.6}$$

Da in der Differentialgleichung (4.1.2) die unabhängige Veränderliche nicht explizit auftritt, kann man die Phase so festlegen, daß

$$x'(0) = 0$$

wird und demzufolge

$$\varphi_n'(0) = 0\,, \qquad n = e_x,\, e_x + 1,\, e_x + 2,\, \ldots\,, \tag{4.1.7}$$

verlangt werden kann.

Wenn man zunächst voraussetzt, daß die Ansätze (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5) solchen Konvergenzforderungen genügen, daß gliedweises Differenzieren und Multiplizieren erlaubt ist, kann man (4.1.3), (4.1.4) und (4.1.5) formal in die Differentialgleichung (4.1.2) einsetzen. Dazu müssen die Reihenausdrücke für $\omega^2 x''$ und $\mu f(x, \omega x')$ berechnet werden. Allgemein gilt, wie man sich leicht überzeugt,

$$\left(\sum_{n=e_a}^{\infty} a_n y^n\right)\left(\sum_{n=e_b}^{\infty} b_n y^n\right) = \sum_{n=e_a+e_b}^{\infty} y^n \sum_{r=e_b}^{n-e_a} a_{n-r} b_r . \tag{4.1.8}$$

Demnach ist

$$\omega^2 = \sum_{n=2e_\omega}^{\infty} y^n \sum_{r=e_\omega}^{n-e_\omega} \varrho_{n-r} \varrho_r$$

und

$$\omega^2 x'' = \sum_{p=2e_\omega+e_x}^{\infty} y^p \sum_{n=2e_\omega}^{p-e_x} \varphi'_{p-n} \sum_{r=e_\omega}^{n-e_\omega} \varrho_{n-r} \varrho_r . \tag{4.1.9}$$

Im Polynom (1.0.5) sei c_{m_1, n_1} der erste und c_{m_2, n_2} der letzte nicht verschwindende Koeffizient,

$$0 \leqq n_1 \leqq m_1 \leqq m_2 = m , \qquad 0 \leqq n_2 \leqq m_2 .$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Reihen für die Potenzen ω^n, x^n, $(x')^n$ wie folgt abgekürzt:

$$\omega^n = \sum_{i=ne_\omega}^{\infty} \varrho_{n,i} y^i , \tag{4.1.10}$$

$$x^n = \sum_{i=ne_x}^{\infty} \varphi_{n,i} y^i , \tag{4.1.11}$$

$$(x')^n = \sum_{i=ne_x}^{\infty} \varphi'_{n,i} y^i . \tag{4.1.12}$$

Dabei ist $\varrho_{n,i}$ der Koeffizient von y^i in der Reihe von ω^n:

$$\varrho_{n,i} = \sum \frac{n!}{l_{e_\omega}! \ldots l_0! \ldots l_n!} \varrho_{e_\omega}^{l_{e_\omega}} \ldots \varrho_0^{l_0} \ldots \varrho_n^{l_n} , \tag{4.1.13}$$

wobei über alle Kombinationen mit

$$\sum_{j=e_\omega}^{n} l_j = n \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=e_\omega}^{n} j\, l_j = i , \qquad l_j = 0, 1, 2, \ldots ,$$

summiert wird. Für $\varphi_{n,i}$ und $\varphi'_{n,i}$ gelten analoge Formeln. Aus (4.1.10), (4.1.11), (4.1.12) und (1.0.5) folgt mit Hilfe von (4.1.8)

$$f(x, \omega x') = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \sum_{s=ke_x+le_\omega}^{\infty} y^s \sum_{r=ke_x}^{s-le_\omega} \varrho_{n,\, s-r} \sum_{i=le_x}^{r-(k-l)e_x} \varphi_{k-l,\, r-i} \varphi'_{l,\, i}$$

und weiter mit (4.1.5)

$$\mu f(x, \omega x') = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \sum_{p=e_\mu+ke_x+le_\omega}^{\infty} y^p \sum_{s=ke_x+le_\omega}^{p-e_\mu} \alpha_{p-s} \sum_{r=ke_x}^{s-le_\omega} \varrho_{l,\, s-r} \sum_{i=le_x}^{r-(k-l)e_x} \varphi_{k-l,\, r-i} \varphi'_{l,\, i} . \tag{4.1.14}$$

Setzt man (4.1.3) und (4.1.14) in die Differentialgleichung (4.1.2) ein, so liefert ein Koeffizientenvergleich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, aus dem die $\varphi_n(\tau)$ und die ϱ_n bestimmt werden sollen. Die bisher noch nicht festgelegten Zahlen e_x, e_ω und e_μ sind nun so zu wählen, daß das System eine sukzessive Auflösung analog der beim Verfahren von LINDSTEDT ermöglicht, d. h. die Gestalt

$$\begin{aligned} &\varphi''_{e_x} \varrho_{e_\omega}^2 + \varphi_{e_x} = 0 , \\ &\varphi''_{e_x+k} \varrho_{e_\omega}^2 + \varphi_{e_x+k} = f_k(\varphi_{e_x}, \varphi'_{e_x}, \varphi_{e_x+1}, \ldots, \varphi'_{e_x+k-1};\ \varrho_{e_\omega}, \varrho_{e_\omega+1}, \ldots, \varrho_{e_\omega+k};\ \alpha_{e_\mu}, \alpha_{e_\mu+1} \ldots, \alpha_{e_\mu+k}), \\ &\qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

hat, wobei die f_k Polynome ihrer Argumente, also der jeweils durch Auflösung der vorhergehenden Differentialgleichung $(k-1)$ bereits bestimmten Funktionen φ_n, φ_n', der bis auf $\varrho_{e\omega+k}$ ebenfalls bereits bestimmten Konstanten ϱ_n und der durch die Entwicklung (4.1.5) gegebenen Konstanten α_n, sind. Soll das durch Koeffizientenvergleich gewonnene Differentialgleichungssystem die Form (4.1.15) haben, so müssen die Zahlen e_x, e_ω und e_μ folgenden Forderungen genügen:

$$2\,e_\omega + e_x = e_x\,, \tag{4.1.16}$$

$$1 + e_x = e_\mu + e_f\,, \tag{4.1.17}$$

wobei e_f der niedrigste Exponent der Reihenentwicklung von $f(x, \omega x')$ nach Potenzen von y ist, d. h.

$$e_f = \begin{cases} m_1 e_x + n_1 e_\omega \\ m_2 e_x + n_2 e_\omega \end{cases} \quad \text{für } e_x \begin{cases} \geqq 0 \\ < 0 \end{cases}. \tag{4.1.18}$$

Aus (4.1.16) folgt

$$e_\omega = 0\,. \tag{4.1.19}$$

Die Funktion $y(\mu)$ soll so bestimmt werden, daß sie auch für mittlere Parameterwerte μ noch kleine y-Werte liefert. Die Größe e_μ ist also unter Beachtung von (4.1.17) möglichst klein zu wählen. Kann e_μ negative Werte annehmen, so beginnt die Reihe (4.1.5) mit negativen y-Potenzen (im Spezialfall $e_\mu = -1$ kann $y = 1/\mu$ gesetzt werden), so daß man für große μ kleine y-Werte erhält. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $e_x \geqq 0$, also $e_\mu = 1 - (m_1 - 1)\,e_x$.

Wenn dabei

a) $m_1 = 0$, d. h. $c_{00} \neq 0$

ist, folgt

$$e_\mu = 1 + e_x \geqq 1\,.$$

Günstigstenfalls, nämlich für $e_x = 0$, ist $e_\mu = 1$.

b) Ist $m_1 = 1$, also $c_{00} = 0$, $c_{10}^2 + c_{11}^2 \neq 0$,

so folgt

$$e_\mu = 1$$

unabhängig von e_x. Auch hier muß $y(\mu)$ so gewählt werden, daß die Reihe (4.1.5) mit einem in y linearen Glied beginnt.

c) Für $m_1 \geqq 2$

schließlich folgt

$$e_\mu \leqq -1\,, \quad \text{wenn} \quad e_x \geqq \frac{2}{m_1 - 1}$$

ist. Nur wenn f kein Absolutglied und keine linearen Glieder besitzt,

$$c_{00} = c_{10} = c_{11} = 0\,,$$

kann man durch geeignete Wahl von e_x erreichen, daß e_μ negativ wird.

2. $e_x < 0$, also $e_\mu = 1 - (m_2 - 1)\,e_x \geqq 1$, $m_2 \geqq 1$.

Im Ansatz (4.1.3) negative y-Potenzen zuzulassen, ist offenbar nicht sinnvoll, denn auch dann kann e_μ bestenfalls gleich eins gewählt werden. Demnach bleiben die folgenden zwei Fälle zu untersuchen:

1. Fall. Die Funktion $f(x, \omega x')$ besitzt absolute oder lineare Glieder. Dann setzt man zweckmäßig $e_x = 0$, $e_\omega = 0$, so daß $e_\mu = 1$ wird.

2. Fall. Die Funktion $f(x, \omega x')$ besitzt keine absoluten oder linearen Glieder, d. h., $m_1 \geqq 2$. Dann setzt man

$$e_x \geqq \frac{2}{m_1 - 1}, \qquad e_\omega = 0, \qquad \text{und damit} \qquad e_\mu \leqq -1.$$

4.2. 1. Fall

Mit $e_x = 0$, $e_\omega = 0$, $e_\mu = 1$ nehmen die Ausdrücke (4.1.9) und (4.1.14) die folgende Gestalt an.

$$\omega^2 x'' = \sum_{p=0}^{\infty} y^p \sum_{l=0}^{p} \varphi''_{p-l} \sum_{k=0}^{l} \varrho_{l-k}\, \varrho_k , \tag{4.2.1}$$

$$\mu f(x, \omega x') = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \sum_{p=1}^{\infty} y^p \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_{p-s} \sum_{r=0}^{s} \varrho_{l,\, s-r} \sum_{i=0}^{r} \varphi_{k-l,\, r-i}\, \varphi'_{l,\, i} . \tag{4.2.2}$$

Damit erhält man durch Koeffizientenvergleich aus der Differentialgleichung (4.1.2)

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_0\, \varrho_0^2 + \varphi_0 &= 0 , \\ \sum_{l=0}^{p} \varphi''_{p-l} \sum_{k=0}^{l} \varrho_{l-k}\, \varrho_k + \varphi_p &= - \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_{p-s} \sum_{r=0}^{s} \varrho_{l,\, s-r} \sum_{i=0}^{r} \varphi_{k-l,\, r-i}\, \varphi'_{l,\, i} , \\ & \qquad\qquad p = 1, 2, \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{4.2.3}$$

Aus der ersten Gleichung von (4.2.3) folgt wegen der Periodizitätsbedingung (4.1.6) und der Phasenfixierung (4.1.7)

$$\varphi_0 = a_1^{(0)} \cos\tau , \qquad \varrho_0 = 1 , \tag{4.2.4}$$

wobei $a_1^{(0)}$ noch unbestimmt ist. Für $p = 1$ liefert (4.2.3)

$$\varphi''_1 + \varphi_1 = - 2\, \varphi''_0\, \varrho_0\, \varrho_1 - \alpha_1 \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l}\, \varrho_{l,0}\, \varphi_{k-l,0}\, \varphi'_{l,0} . \tag{4.2.5}$$

Und mit (4.1.13) folgt

$$\varphi''_1 + \varphi_1 = - 2\, \varphi''_0\, \varrho_0\, \varrho_1 - \alpha_1 \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l}\, \varrho_0^l \cdot \varphi_0^{k-l}\, \varphi_0'^{l} ,$$

$$\varphi''_1 + \varphi_1 = 2\, \varrho_1\, a_1^{(0)} \cos\tau - \alpha_1 \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l}\, a_1^{(0)k}\, (-1)^l \cos^{k-l}\tau \sin^{l}\tau . \tag{4.2.6}$$

Wenn man die Rechnung in voller Allgemeinheit weiterführt, werden die Formeln sehr umfangreich. Trotzdem soll hier wenigstens der erste Schritt allgemein durchgerechnet werden, um zu zeigen, welche Schwierigkeiten sich bei der Berechnung der φ_n und ϱ_n auf elektronischen Rechenmaschinen ergeben. Die Sinus- und Kosinuspotenzen in (4.2.6) lassen sich auf Ausdrücke zurückführen, die in $\sin\tau$, $\cos\tau$, $\sin 2\tau$, $\cos 2\tau$, ... linear sind. Dazu setzt man

$$\sin\tau = \frac{1}{2\,i}\,(e^{i\tau} - e^{-i\tau}) , \qquad \cos\tau = \frac{1}{2}\,(e^{i\tau} + e^{-i\tau}) \tag{4.2.7}$$

und erhält nach dem binomischen Satz

$$\sin^n\tau = 2^{-n}\, i^{-n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p\, e^{(n-2p)i\tau} , \tag{4.2.8}$$

$$\cos^m\tau = 2^{-m} \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} e^{(m-2q)i\tau} \tag{4.2.9}$$

und daraus

$$\sin^n\tau \cos^m\tau = 2^{-n-m}\, i^{-n} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} \binom{n}{p}\binom{m}{q} (-1)^p\, e^{(n+m-2p-2q)i\tau} .$$

Führt man durch $p + q = r$, $p = s$ neue Summationsindizes ein, so folgt

$$\sin^n \tau \cos^m \tau = 2^{-n-m}\, i^{-n} \sum_{r=0}^{m+n} e^{(m+n-2r)i\tau} \cdot \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{m}{r-s}(-1)^s . \tag{4.2.10}$$

In der Summe über r stimmen die Koeffizienten des r-ten und $(m + n - r)$-ten Gliedes bis auf ein Vorzeichen überein, es gilt also

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{m}{r-s}(-1)^s = (-1)^n \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{m}{m+n-r-s}(-1)^s . \tag{4.2.11}$$

Beweis. In der rechten Summe von (4.2.11) wird der Summationsindex s durch $p = n - s$ ersetzt; dann ergibt sich wegen

$$\binom{l}{k} = \binom{l}{l-k}$$

für die rechte Seite der Ausdruck

$$(-1)^{2n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{m}{r-p}(-1)^{-p} ,$$

der mit der linken Summe in (4.2.11) identisch ist, q. e. d. Man kann also in der Summe über r in (4.2.10) jeweils das r-te und $(m + n - r)$-te Glied zu einem Sinus- (n ungerade) oder Kosinusterm (n gerade) zusammenfassen und erhält

$$\sin^n \tau \cos^m \tau = 2^{-n-m+1} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{m+n-1}{2}\right]} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (m + n - 2r)\tau \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{m}{r-s}(-1)^s$$

$$+ 2^{-n-m}\, i^{-n} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{m+n}{\frac{2}{}-s}(-1)^s \quad \text{für} \quad \begin{matrix}n \text{ gerade}\\ n \text{ ungerade}\end{matrix},$$

wobei das Absolutglied nur auftritt, wenn $m + n$ eine gerade Zahl ist. Da auf der linken Seite der letzten Gleichung ein reeller Ausdruck steht, muß das Absolutglied darüberhinaus verschwinden, wenn n ungerade ist. Es gilt also

$$\left.\begin{aligned}
\sin^{2n} \tau \cos^m \tau &= 2^{-2n-m+1} (-1)^n \sum_{r=0}^{\left[\frac{m-1}{2}+n\right]} \cos (m + 2n - 2r)\tau \\
&\quad \times \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\, r-m)}^{\mathrm{Min}(r,\, 2n)} \binom{2n}{s}\binom{m}{r-s}(-1)^s \\
&\quad + \frac{1 + (-1)^m}{2^{2n+m+1}} (-1)^n \sum_{s=\mathrm{Max}\left(0,\, n-\frac{m}{2}\right)}^{\mathrm{Min}\left(\frac{m}{2}+n,\, 2n\right)} \binom{2n}{s}\binom{m}{\frac{2}{}+n-s}(-1)^s , \\
\sin^{2n+1} \tau \cos^m \tau &= 2^{-2n-m} (-1)^n \sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}+n\right]} \sin (m + n + 1 - 2r) \\
&\quad \times \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\, r-m)}^{\mathrm{Min}(r,\, 2n+1)} \binom{2n+1}{s}\binom{m}{r-s}(-1)^s ,
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.12}$$

wobei m und n nichtnegative, ganze Zahlen mit

$$m^2 + n^2 > 0$$

sein sollen. Das Polynom $f(x, \omega x')$ sei nach Koeffizienten mit geradem und ungeradem Index n geordnet,

$$\varphi_1'' + \varphi_1 = 2\,\varrho_1\,a_1^{(0)}\cos\tau - \alpha_1\,c_{00} - \\ - \alpha_1 \sum_{k=1}^{m} a_1^{(0)k} \left[\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} c_{k,2l}\cos^{k-2l}\tau\,\sin^{2l}\tau - \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_{k,2l+1}\cos^{k-2l}\tau^{-1}\sin^{2l+1}\tau \right], \tag{4.2.13}$$

so daß aus (4.2.6) folgt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1'' + \varphi_1 = {} & 2\,\varrho_1\,a_1^{(0)}\cos\tau - \alpha_1\,c_{00} - \alpha_1 \sum_{k=1}^{m} a_1^{(0)k}\,2^{1-k} \\ & \times \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} c_{k,2l} \left[(-1)^l \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \cos(k-2r)\tau \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\,r-k+2l)}^{\mathrm{Min}(r,\,2l)} (-1)^s \binom{2l}{s}\binom{k-2l}{r-s} \right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{1+(-1)^k}{4}(-1)^l \sum_{s=\mathrm{Max}\left(0,\,2l-\frac{k}{2}\right)}^{\mathrm{Min}\left(\frac{k}{2},\,2l\right)} (-1)^s \binom{2l}{s}\binom{k-2l}{\frac{k}{2}-s} \right] \right. \\ & - \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} c_{k,2l+1}(-1)^l \sum_{r=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \sin(k-2r)\tau \\ & \left. \times \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\,r+2l+1-k)}^{\mathrm{Min}(r,\,2l+1)} \binom{2l+1}{s}\binom{k-2l-1}{r-s}(-1)^s \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.14}$$

Dafür kann man zur Abkürzung schreiben

$$\varphi_1'' + \varphi_1 = g_0 + \sum_{n=1}^{N_1} (g_n\cos n\tau + h_n\sin n\tau)\,. \tag{4.2.15}$$

Setzt man nun

$$\varphi_1 = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_1} (a_n^{(1)}\cos n\tau + b_n^{(1)}\sin n\tau)\,, \tag{4.2.16}$$

so folgt durch Koeffizientenvergleich aus (4.2.15)

$$a_0^{(1)} = g_0\,, \qquad a_n^{(1)} = \frac{1}{1-n^2}g_n\,, \qquad b_n^{(1)} = \frac{1}{1-n^2}h_n\,, \qquad n = 2, 3, \ldots, N_1\,,$$

und wegen (4.1.7)

$$b_1^{(1)} = -\sum_{n=2}^{N_1} \frac{n}{1-n^2}h_n\,,$$

wenn man das Auftreten von Säkulartermen dadurch vermeidet, daß man wie beim Verfahren von LINDSTEDT

$$g_1 = 0\,, \qquad h_1 = 0 \tag{4.2.17}$$

fordert, wodurch man zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten $a_1^{(0)}$ und ϱ_1 erhält. Ausführlich geschrieben ist

$$g_1 = 2\,\varrho_1\,a_1^{(0)} - \alpha_1 \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_1^{(0)\,2k+1}\,2^{-2k} \sum_{l=0}^{k} c_{2k+1,2l} \\ \times (-1)^l \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\,2l-k-1)}^{\mathrm{Min}(k,\,2l)} \binom{2l}{s}\binom{2k+1-2l}{k-s}(-1)^s\,, \tag{4.2.18}$$

also

$$g_1 = 2\,\varrho_1\,a_1^{(0)} - \alpha_1\left[a_1^{(0)}\,c_{10} + \frac{1}{4}a_1^{(0)\,3}(3\,c_{30} + c_{32}) + \cdots\right]$$

und

$$h_1 = \alpha_1 \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_1^{(0)\,2k+1}\, 2^{-2k} \sum_{l=0}^{k} c_{2k+1,2l+1}\, (-1)^l \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\,2l-k)}^{\mathrm{Min}(k,\,2l+1)} \binom{2l+1}{s}\binom{2k-2l}{k-s}(-1)^s\,, \quad (4.2.19)$$

also

$$h_1 = \alpha_1 \left[a_1^{(0)}\, c_{11} + \frac{1}{4} a_1^{(0)3}\, (c_{31} + 3\, c_{33}) + \cdots \right].$$

Für $a_1^{(0)} \neq 0$ (der Fall $a_1^{(0)} = 0$ ist auszuschließen, da dann $e_x = 1$ würde) folgt aus (4.2.18)

$$\varrho_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_1^{(0)2k}\, 2^{-2k} \sum_{l=0}^{k} c_{2k+1,2l}\, (-1)^l \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\,2l-k-1)}^{\mathrm{Min}(k,\,2l)} \binom{2l}{s}\binom{2k+1-2l}{k-s}(-1)^s \quad (4.2.20)$$

und aus (4.2.19)

$$a_1^{(0)} = \sqrt{z_1}\,.$$

Dabei ist z_1 Wurzel der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} z^k\, 2^{-2k} \sum_{l=0}^{k} c_{2k+1,2l+1}\, (-1)^l \sum_{s=\mathrm{Max}(0,\,2l-k)}^{\mathrm{Min}(k,\,2l+1)} (-1)^s \binom{2l+1}{s}\binom{2k-2l}{k-s} = 0\,. \quad (4.2.21)$$

Im allgemeinen ($m > 3$) wird (4.2.21) mehrere Wurzeln besitzen; man benötigt dann bereits vor Anwendung des Verfahrens einige Kenntnisse über die gesuchte Lösung, um entscheiden zu können, welche Wurzel den gesuchten Koeffizienten liefert. Nach Bestimmung von $a_1^{(0)}$ hat man

$$\varphi_0 = a_1^{(0)} \cos\tau\,, \qquad \varrho_0 = 1\,, \quad (4.2.22)$$

$$\varphi_1 = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_1} (a_n^{(1)} \cos n\tau + b_n^{(1)} \sin n\tau)\,, \quad \varrho_1\,, \quad (4.2.23)$$

wobei lediglich $a_1^{(1)}$ noch unbekannt ist und im nächsten Schritt berechnet werden muß. Aus (4.1.13) erhält man

$$\varrho_{n,0} = \varrho_0^n\,, \qquad \varrho_{n,1} = n\,\varrho_0^{n-1}\,\varrho_1 \qquad \text{für} \qquad n \geqq 0\,. \quad (4.2.24)$$

Entsprechende Formeln gelten für $\varphi_{n,o}$, $\varphi_{n,1}$, $\varphi'_{n,0}$ und $\varphi'_{n,1}$. Damit folgt für $p = 2$ aus (4.2.3)

$$\varphi_2'' + \varphi_2 = -2\,\varrho_1\,\varphi_1'' - (2\,\varrho_2 + \varrho_1^2)\,\varphi_0'' - \alpha_2 \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k} c_{k,l}\,\varrho_0^l\,\varphi_0^{k-l}\,\varphi_0'^{\,l} -$$

$$- \alpha_1 \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k} c_{k,l}\{l\,\varrho_0^{l-1}\,\varrho_1\,\varphi_0^{k-l}\,\varphi_0'^{\,l} + \varrho_0^l[(k-l)\,\varphi_0^{k-l-1}\,\varphi_1\,\varphi_0'^{\,l} + l\,\varphi_0^{k-l}\,\varphi_0'^{\,l-1}\,\varphi_1']\}\,. \quad (4.2.25)$$

In (4.2.25) treten $\varphi_1\,\varphi_1'$, φ_1'' nur linear auf, die Bestimmungsgleichung für $a_1^{(1)}$ ist also eindeutig nach $a_1^{(1)}$ auflösbar. Wie φ_1 lassen sich durch Wiederholung des Verfahrens alle höheren Koeffizienten φ_n, ϱ_n schrittweise bestimmen. Es bleibt zu zeigen, daß sich im p-ten Schritt der in

$$\varphi_{p-1} = a_0^{(p-1)} + \sum_{n=1}^{N_{p-1}} (a_n^{(p-1)} \cos n\tau + b_n^{(p-1)} \sin n\tau)$$

noch unbestimmte Koeffizient $a_1^{(p-1)}$ $(p > 1)$ aus der nächsthöheren Differentialgleichung

$$\varphi_p'' + \varphi_p = -\sum_{l=1}^{p} \varphi_{p-n}'' \sum_{k=0}^{l} \varrho_{l-k}\,\varrho_l - \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_{p-s} \sum_{r=0}^{s} \varrho_{l,s-r} \sum_{i=0}^{r} \varphi_{k-l,r-i}\,\varphi'_{l,i} \quad (4.2.26)$$

eindeutig berechnen läßt, was gleichbedeutend damit ist, daß die Größen φ_{p-1}, φ'_{p-1} und φ''_{p-1} auf der rechten Seite von (4.2.26) höchstens linear vorkommen. Tatsächlich treten die zweiten Ableitungen von φ_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, p$ überhaupt nur linear auf. Weiterhin läuft die Summe

über i höchstens bis $p-1$. Nach (4.1.13) ist $\varphi_{k-l,p-1-i}$ der Koeffizient von y^{p-1-i} in der y-Potenzreihe von x^{k-l}. Die Funktion φ_{p-1} tritt also nur im Fall $i=0$, und dann lediglich mit φ_0^{k-l-1} multipliziert, auf. Für $\varphi'_{l,i}$ gilt wegen $i=0$

$$\varphi'_{l,i} = \varphi'_{l,0} = \varphi_0'^{l} .$$

Die Funktion φ'_{p-1} dagegen tritt nur im Fall $i=p-1$ auf, und dann ist

$$\varphi_{k-l,p-1-i} = \varphi_{k-l,0} = \varphi_0^{k-l} .$$

Damit ist gezeigt, daß φ_{p-1} und seine Ableitungen höchstens linear auftreten und $a_1^{(p-1)}$ demzufolge durch (4.2.26) eindeutig bestimmt ist.

Bei der Berechnung der φ_l und ϱ_l auf elektronischen Rechenautomaten ist also lediglich die Mehrdeutigkeit bei der Bestimmung des Koeffizienten $a_1^{(0)}$ von φ_0 in Gleichung (4.2.21) zu beachten. Die höheren Koeffizienten φ_n und ϱ_n lassen sich dann automatisch berechnen.

4.3. Konvergenz der Potenzreihenentwicklungen

Die Frage der Konvergenz des angegebenen Verfahrens konnte bisher nicht allgemein beantwortet werden. POINCARÉ hat ein Beispiel gefunden [57], in dem das hier als Spezialfall enthaltene Verfahren von LINDSTEDT ($\alpha_1=1$, $\alpha_n=0$, $n\neq 1$) nicht konvergiert. Die Reihen (4.1.3) und (4.1.4) sind dann lediglich als asymptotische Entwicklungen anzusehen, d. h., sie beschreiben nur für $y\to 0$ das Verhalten der Lösung und der Frequenz. In erster Linie für nichtautonome Differentialgleichungen konstruierte RJABOV [64—66], aufbauend auf einer Arbeit von LJAPUNOV [49'], ebenfalls für den erwähnten Spezialfall majorante Funktionalgleichungen, deren Lösungen obere Schranken für die Lösungen der Differentialgleichungen darstellen. Löst man die Funktionalgleichungen durch Potenzreihenansätze, so können Konvergenzschranken angegeben werden, die wegen der Majoranteneigenschaft der Funktionalgleichungen gleichzeitig Konvergenzschranken für die Lösungsansätze der Differentialgleichungen sind. Diese Methode kann zwar auch für autonome Systeme verwendet werden [65], jedoch werden die Abschätzungen dann sehr kompliziert, so daß man sich auf die gesonderte Untersuchung von konkreten Fällen beschränken muß.

4.4 Beispiel

Das Verfahren wird auf die VAN DER POLsche Differentialgleichung (1.0.8) angewendet, die durch die Transformation (4.1.1) auf die Form

$$\omega^2 x'' + x + \mu\,\omega\,(x^2-1)\,x' = 0\,, \qquad \mu > 0\,, \tag{4.4.1}$$

gebracht werden kann. Es ist also

$$c_{11} = -1\,, \quad c_{31} = 1\,, \quad c_{m,n} = 0 \quad \text{für} \quad m,n \neq \begin{cases} 1,1 \\ 3,1 \end{cases}. \tag{4.4.2}$$

Die Bestimmungsgleichung (4.2.21) für $a_1^{(0)}$ bekommt die Gestalt

$$c_{11}\,(-1) + c_{31}\,z\frac{1}{4}(1-2) = 0\,,$$

also

$$z = 4\,, \qquad a_1^{(0)} = 2\,,$$

wenn man die positive Wurzel wählt. Man hat damit und wegen (4.2.4) für die ersten Koeffizienten

$$\varphi_0 = 2\cos\tau\,, \qquad \varrho_0 = 1\,. \tag{4.4.3}$$

Aus (4.2.20) folgt

$$\varrho_1 = 0\,, \tag{4.4.4}$$

weil die VAN DER POLsche Differentialgleichung keine Nichtlinearitäten mit Koeffizienten des Typs $c_{2k+1,2l}$ besitzt. Aus (4.2.14) sind die FOURIER-Koeffizienten von φ_1 zu bestimmen:

$$b_3^{(1)} = -\frac{1}{8} h_3 = -\frac{1}{8}\alpha_1 a_1^{(0)3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\alpha_1\,,$$

$$a_2^{(1)} = b_2^{(1)} = a_3^{(1)} = a_n^{(1)} = b_n^{(1)} = 0\,, \qquad n = 4, 5, \ldots .$$

Dann ist wegen (4.1.7)

$$b_1^{(1)} = \frac{3}{4}\alpha_1\,,$$

also

$$\varphi_1 = a_1^{(1)} \cos\tau + \frac{3}{4}\alpha_1 \sin\tau - \frac{1}{4}\alpha_1 \sin 3\tau\,. \tag{4.4.5}$$

Die höheren φ_n und ϱ_n sind aus dem folgenden Differentialgleichungssystem, das sich aus (4.2.3) ergibt, schrittweise zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\varphi_2'' + \varphi_2 &= -\varphi_0''\, 2\,\varrho_2 - (\varphi_0^2 - 1)(\alpha_2\varphi_0' + \alpha_1\varphi_1') - 2\,\alpha_1\varphi_0\varphi_1\varphi_0'\,,\\
\varphi_3'' + \varphi_3 &= -\varphi_0''\, 2\,\varrho_3 - \varphi_1''\, 2\,\varrho_2 - (\varphi_0^2 - 1)[\alpha_3\varphi_0' + \alpha_2\varphi_1'\\
&\quad + \alpha_1(\varphi_2' + \varrho_2\varphi_0')] - 2\,\varphi_0\varphi_1(\alpha_2\varphi_0' + \alpha_1\varphi_1') - (\varphi_1^2 + 2\,\varphi_0\varphi_2)\,\alpha_1\varphi_0'\,.\\
\varphi_4'' + \varphi_4 &= -\varphi_0''(\varrho_2^2 + 2\,\varrho_4) - \varphi_1''\, 2\,\varrho_3 - \varphi_2''\, 2\,\varrho_2 - (\varphi_0^2 - 1)[\alpha_4\varphi_0'\\
&\quad + \alpha_3\varphi_1' + \alpha_2(\varphi_2' + \varrho_2\varphi_0') + \alpha_1(\varphi_3' + \varrho_2\varphi_1' + \varrho_3\varphi_0')]\\
&\quad - 2\,\varphi_0\varphi_1[\alpha_3\varphi_0' + \alpha_2\varphi_1' + \alpha_1(\varphi_2' + \varrho_2\varphi_0')]\\
&\quad - (\varphi_1^2 + 2\,\varphi_0\varphi_2)(\alpha_2\varphi_0' + \alpha_1\varphi_1') - (2\,\varphi_0\varphi_3 + 2\,\varphi_1\varphi_2)\,\alpha_1\varphi_0'\,,\\
\varphi_5'' + \varphi_5 &= -\varphi_0''(2\,\varrho_5 + 2\,\varrho_2\varrho_3) - \varphi_1''(\varrho_2^2 + 2\,\varrho_4) - \varphi_2''\, 2\,\varrho_3 - \varphi_3''\, 2\,\varrho_2\\
&\quad - (\varphi_0^2 - 1)[\alpha_5\varphi_0' + \alpha_4\varphi_1' + \alpha_3(\varphi_2' + \varrho_2\varphi_0') + \alpha_2(\varphi_3' + \varrho_2\varphi_1'\\
&\quad + \varrho_3\varphi_0') + \alpha_1(\varphi_4' + \varrho_2\varphi_2' + \varrho_3\varphi_1' + \varrho_4\varphi_0')]\\
&\quad - 2\,\varphi_0\varphi_1[\alpha_4\varphi_0' + \alpha_3\varphi_1' + \alpha_2(\varphi_2' + \varrho_2\varphi_0') + \alpha_1(\varphi_3' + \varrho_2\varphi_1' + \varrho_3\varphi_0')]\\
&\quad - (\varphi_1^2 + 2\,\varphi_0\varphi_2)[\alpha_3\varphi_0' + \alpha_2\varphi_1' + \alpha_1(\varphi_2' + \varrho_2\varphi_0')]\\
&\quad - (2\,\varphi_0\varphi_3 + 2\,\varphi_1\varphi_2)(\alpha_2\varphi_0' + \alpha_1\varphi_1')\\
&\quad - (\varphi_2^2 + 2\,\varphi_0\varphi_4 + 2\,\varphi_1\varphi_3)\,\alpha_1\varphi_0'\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nach Durchführung der oben angegebenen Schritte, auf die umfangreiche Berechnung soll hier im einzelnen nicht eingegangen werden, erhält man die folgenden Ergebnisse:

$$\varphi_1 = \frac{3}{4}\alpha_1 \sin\tau - \frac{1}{4}\alpha_1 \sin 3\tau\,,$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{8}\alpha_1^2 \cos\tau + \frac{3}{4}\alpha_2 \sin\tau + \frac{3}{16}\alpha_1^2 \cos 3\tau - \frac{1}{4}\alpha_2 \sin 3\tau - \frac{5}{96}\alpha_1^2 \cos 5\tau\,,$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2 \cos\tau + \left(-\frac{7}{256}\alpha_1^3 + \frac{3}{4}\alpha_3\right)\sin\tau + \frac{3}{8}\alpha_1\alpha_2 \cos 3\tau + \left(\frac{21}{256}\alpha_1^3 - \frac{1}{4}\alpha_3\right)\sin 3\tau$$

$$- \frac{5}{48}\alpha_1\alpha_2 \cos 5\tau - \frac{35}{576}\alpha_1^3 \sin 5\tau + \frac{7}{576}\alpha_1^3 \sin 7\tau\,,$$

$$q_4 = \left(-\frac{1}{4}\alpha_1\alpha_3 - \frac{1}{8}\alpha_2^2 + \frac{73}{12288}\alpha_1^4\right)\cos\tau + \left(-\frac{21}{256}\alpha_1^2\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_4\right)\sin\tau$$
$$+ \left(-\frac{47}{1536}\alpha_1^4 + \frac{3}{8}\alpha_1\alpha_3 + \frac{3}{16}\alpha_2^2\right)\cos 3\tau + \left(\frac{63}{256}\alpha_1^2\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_4\right)\sin 3\tau$$
$$+ \left(\frac{1085}{27648}\alpha_1^4 - \frac{5}{48}\alpha_1\alpha_3 - \frac{5}{96}\alpha_2^2\right)\cos 5\tau - \frac{35}{192}\alpha_1^2\alpha_2\sin 5\tau$$
$$- \frac{2149}{110592}\alpha_1^4\cos 7\tau + \frac{7}{192}\alpha_1^2\alpha_2\sin 7\tau + \frac{61}{20480}\alpha_1^4\cos 9\tau ,$$

$$q_5 = \left(-\frac{1}{4}\alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_4 + \frac{73}{3072}\alpha_1^3\alpha_2\right)\cos\tau$$
$$+ \left(\frac{3}{4}\alpha_5 - \frac{21}{256}\alpha_1^2\alpha_3 - \frac{21}{256}\alpha_1\alpha_2^2 + \frac{89887}{3317760}\alpha_1^5\right)\sin\tau$$
$$+ \left(\frac{3}{8}\alpha_1\alpha_4 + \frac{3}{8}\alpha_2\alpha_3 - \frac{47}{384}\alpha_1^3\alpha_2\right)\cos 3\tau$$
$$+ \left(-\frac{1}{4}\alpha_5 + \frac{63}{256}\alpha_1^2\alpha_3 + \frac{63}{256}\alpha_1\alpha_2^2 - \frac{2591}{294912}\alpha_1^5\right)\sin 3\tau$$
$$+ \left(-\frac{5}{48}\alpha_1\alpha_4 - \frac{5}{48}\alpha_2\alpha_3 + \frac{1085}{6912}\alpha_1^3\alpha_2\right)\cos 5\tau$$
$$+ \left(-\frac{35}{192}\alpha_1\alpha_2^2 - \frac{35}{192}\alpha_1^2\alpha_3 + \frac{52885}{2654208}\alpha_1^5\right)\sin 5\tau - \frac{2149}{27648}\alpha_1^3\alpha_2\cos 7\tau$$
$$+ \left(\frac{7}{192}\alpha_1\alpha_2^2 + \frac{7}{192}\alpha_1^2\alpha_3 - \frac{55633}{2654208}\alpha_1^5\right)\sin 7\tau$$
$$+ \frac{61}{5120}\alpha_1^3\alpha_2\cos 9\tau + \frac{7457}{1228800}\alpha_1^5\sin 9\tau - \frac{5533}{7372800}\alpha_1^5\sin 11\tau , \ldots$$

und entsprechend für ω:

$$\varrho_2 = -\frac{1}{16}\alpha_1^2 , \qquad \varrho_3 = -\frac{1}{8}\alpha_1\alpha_2 ,$$
$$\varrho_4 = \frac{17}{3072}\alpha_1^4 - \frac{1}{8}\alpha_1\alpha_3 - \frac{1}{16}\alpha_2^2 ,$$
$$\varrho_5 = -\frac{1}{8}\alpha_1\alpha_4 - \frac{1}{8}\alpha_2\alpha_3 + \frac{17}{768}\alpha_1^3\alpha_2 ,$$
$$\varrho_6 = -\frac{1}{16}\alpha_3^2 - \frac{1}{8}\alpha_2\alpha_4 - \frac{1}{8}\alpha_1\alpha_5 + \frac{17}{512}\alpha_1^2\alpha_2^2 + \frac{17}{768}\alpha_1^3\alpha_3 + \frac{245053}{53084160}\alpha_1^6 , \ldots .$$

so daß die Ansätze (4.1.3) und (4.1.4) bis zum fünften bzw. sechsten Koeffizienten bestimmt sind. Für $x(\tau)$ und ω erhält man also Näherungswerte der Gestalt

$$\bar{x}(\tau) = \sum_{n=0}^{5} \varphi_n(\tau)\, y^n , \tag{4.4.6}$$

$$\bar{\omega} = \sum_{n=0}^{6} \varrho_n\, y^n . \tag{4.4.7}$$

Von der Potenzreihe (4.1.5) wurden dabei die ersten fünf Koeffizienten benötigt.

Die Ergebnisse wurden für $\mu = 0{,}1$ und $\mu = 1$ in den Fällen $y = \mu$ bzw. $y = \mu/(1+\mu)$ numerisch ausgewertet und in der Phasenebene den Lösungen gegenübergestellt, die mit dem Lie-Reihen-Verfahren (Kap. 3) erzielt wurden (Abb. 4.1).

Bemerkung 4.1. Für den Fall $y = \mu$ gibt es eine Untersuchung von Rjabov [65], nach der die Potenzreihenansätze (4.1.3) und (4.1.4) für $y < 0{,}1$ konvergieren.

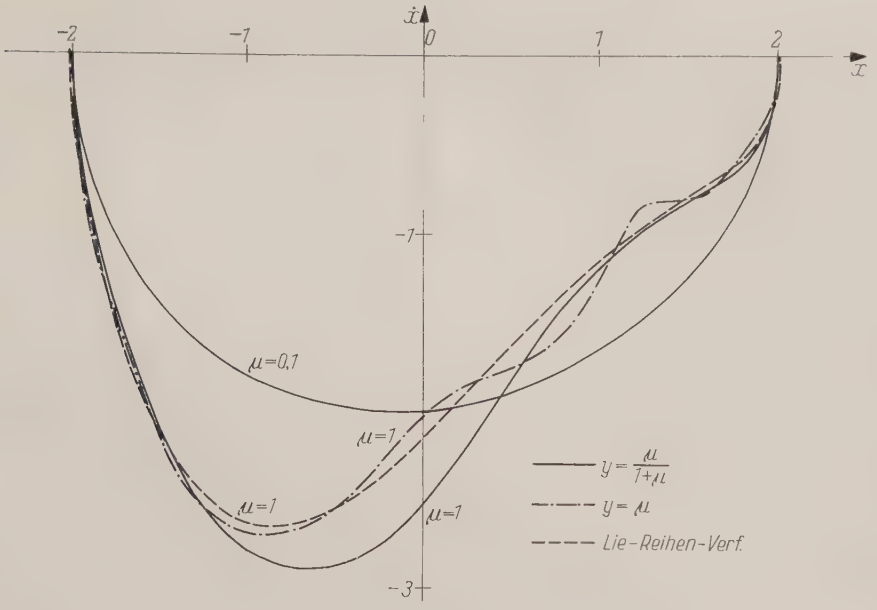

Abb. 4.1

Bemerkung 4.2. Wählt man $y = \frac{\mu}{1+\mu}$, so daß in (4.1.5) $\alpha_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, wird, so liefert das Verfahren Entwicklungen für $x(\tau)$ und ω, die mit denen übereinstimmen, die SHOHAT [68, 69] auf etwas andere Weise hergeleitet hat.

4.5. 2. Fall

Wegen

$$m_1 \geqq 2\,, \qquad e_\omega = 0 \tag{4.5.1}$$

kann man für große Parameterwerte

$$e_x \geqq \frac{2}{m_1 - 1} > 0 \tag{4.5.2}$$

und damit

$$e_\mu = 1 - (m_1 - 1)\, e_x \leqq -1 \tag{4.5.3}$$

wählen, z. B. für

$$\begin{aligned} m_1 = 2\colon &\quad e_x = 2\,, &\quad e_\mu = -1\,,\\ m_1 = 3\colon &\quad e_x = 1\,, &\quad e_\mu = -1\,,\\ m_1 \geqq 4\colon &\quad e_x = 1\,, &\quad e_\mu = 2 - m_1 \leqq -2\,. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke (4.1.9) und (4.1.14) haben mit (4.5.1) und (4.5.3) die Gestalt

$$\omega^2 x'' = \sum_{p=e_x}^{\infty} y^p \sum_{n=0}^{p-e_x} \varphi''_{p-n} \sum_{m=0}^{n} \varrho_{n-m}\, \varrho_m \tag{4.5.4}$$

bzw.

$$\mu f(x, \omega x') = \sum_{k=m_1}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \sum_{p=1+(k-m_1+1)e_x}^{\infty} y^p \sum_{s=k e_x}^{p-1+(m_1-1)e_x} \alpha_{p-s} \sum_{r=k e_x}^{s} \varrho_{l,s-r} \sum_{i=l e_x}^{r-(k-l)e_x} \varphi_{k-l,r-i}\, \varphi'_{l,i}\,. \tag{4.5.5}$$

Wie früher erhält man durch Koeffizientenvergleich ein System von Differentialgleichungen für die $\varphi_\nu(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{e_x}'' \varrho_0^2 + \varphi_{e_x} = 0 \,, \\ &\varphi_p'' \varrho_0^2 + \varphi_p = -\sum_{l=1}^{p-e_x} \varphi_{p-l}'' \sum_{k=0}^{l} \varrho_{l-k}\, \varrho_k - \sum_{k=m_1}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} \\ &\qquad \times \sum_{s}^{p-1+(m_1-1)e_x} \alpha_{p-s} \sum_{r=k e_x}^{s} \varrho_{l,s-r} \sum_{i=l e_x}^{r-(k-l)e_x} \varphi_{k-l,r-i}\, \varphi_{l,i}' \,, \\ &p = e_x + 1,\, e_x + 2,\, \ldots \,. \end{aligned}\right\} \tag{4.5.6}$$

Wie aus der unteren Grenze der Summe über p und aus den Grenzen der Summen über s in (4.5.5) abzulesen ist, treten jedoch im Gegensatz zu (4.2.3) in der zweiten Gleichung ($p = e_x + 1$) des Systems (4.5.6) noch nicht alle Koeffizienten $c_{k,l}$ der nichtlinearen Glieder von $f(x, \omega x')$ auf, sondern nur die $c_{m_1,l}$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m_1$. Der Einfluß der höheren Nichtlinearitäten setzt nacheinander in den folgenden Gleichungen von (4.5.6) ein. Aus diesem Grunde führt die sukzessive Auflösung des Differentialgleichungssystems nach dem Schema des LINDSTEDTschen Verfahrens hier im allgemeinen nicht zum Ziel, was am Beispiel der verallgemeinerten VAN DER POLschen Differentialgleichung

$$x + x + \mu\,(x^2 - 1)\, x^2 \dot{x} = 0 \,, \qquad \mu > 0 \,, \tag{4.5.7}$$

gezeigt werden soll. Sie besitzt nach Satz 1.4 genau eine periodische Lösung, denn es gilt

a) $f(x) = \mu\,(x^2 - 1)\, x^2 < 0$ über $(-1, 1)$,
$f(x) > 0$ über $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mu x^3}{5}\left(x^2 - \frac{5}{3}\right) = \infty$,

c) $F\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = F\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 0$.

Durch die Transformation (4.1.1) erhält (4.5.7) die Gestalt

$$\omega^2 x'' + x + \mu\,\omega\,(x^2 - 1)\, x^2 x' = 0 \,, \qquad \mu > 0 \,. \tag{4.5.8}$$

Es ist also

$$c_{31} = -1 \,, \qquad c_{51} = 1 \,, \qquad c_{m,n} = 0 \qquad \text{für} \qquad m, n \neq \begin{cases} 3,1 \\ 5,1 \end{cases}$$

und damit

$$m_1 = 3 \,,$$

so daß

$$e_x = 1 \,, \qquad e_\mu = -1 \tag{4.5.9}$$

gewählt werden kann. Zur Vereinfachung der Rechnung werde

$$\mu = \frac{1}{y} \,, \qquad \text{also} \qquad \alpha_{-1} = 1 \,, \qquad \alpha_n = 0 \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gesetzt. Damit folgt aus (4.5.6) für $p = 1$

$$\varphi_1'' \varrho_0^2 + \varphi_1 = 0 \,, \tag{4.5.10}$$

für $p = 2, 3$

$$\varphi_p'' \varrho_0^2 + \varphi_p = -\sum_{l=1}^{p-1} \varphi_{p-l}'' \sum_{k=0}^{l} \varrho_{l-k}\, \varrho_k + \sum_{r=3}^{p+1} \varrho_{1,p+1-r} \sum_{i=1}^{r-2} \varphi_{2,r-i}\, \varphi_{1,i}' \tag{4.5.11}$$

und für $p = 4, 5, \ldots$

$$\begin{aligned} \varphi_p'' \varrho_0^2 + \varphi_p = &-\sum_{l=1}^{p-1} \varphi_{p-l}'' \sum_{k=0}^{l} \varrho_{l-k}\, \varrho_k + \sum_{r=3}^{p+1} \varrho_{1,p+1-r} \sum_{i=1}^{r-2} \varphi_{2,r-i}\, \varphi_{1,i}' \\ &- \sum_{r=3}^{p+1} \varrho_{1,p+1-r} \sum_{i=1}^{r-4} \varphi_{4,r-i}\, \varphi_{1,i}' \,. \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Aus (4.5.10) folgt

$$\varphi_1 = a_1^{(1)} \cos \tau \,, \qquad \varrho_0 = 1 \,.$$

Die erste Gleichung von (4.5.11) hat damit die Gestalt

$$\varphi_2'' + \varphi_2 = -2\,\varrho_1\,\varphi_1'' + \varphi_1'\,\varphi_1^2 = 2\,\varrho_1\,a_1 \cos\tau - \frac{1}{4}\,a_1^3 \sin\tau - \frac{1}{4}\,a_1^3 \sin 3\tau \,,$$

wobei zur Vereinfachung der Schreibweise

$$a_1^{(k)} = a_k \,, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

gesetzt wurde. Zur Vermeidung von Säkulartermen muß $a_1 = 0$ gesetzt werden, woraus sich im Widerspruch zu (4.5.9) $e_x > 1$ ergibt. Die Größe ϱ_1 bleibt unbestimmt. Man erhält

$$\varphi_2 = a_2 \cos\tau \,.$$

Damit folgt aus (4.5.11)

$$\varphi_3'' + \varphi_3 = -2\,\varrho_1\,\varphi_2'' = 2\,\varrho_1\,a_2 \cos\tau \,.$$

Um Säkularterme zu vermeiden, kann man entweder $\varrho_1 = 0$ oder $a_2 = 0$ setzen. In jedem Fall ist

$$\varphi_3 = a_3 \cos\tau \,.$$

Damit erhält man aus (4.5.12) entweder

$$\varphi_4'' + \varphi_4 = -2\,\varrho_2\,\varphi_2'' = 2\,\varrho_2\,a_2 \cos\tau$$

oder

$$\varphi_4'' + \varphi_4 = -2\,\varrho_1\,\varphi_3'' = 2\,\varrho_1\,a_3 \cos\tau \,,$$

woraus als Lösung

$$\varphi_4 = a_4 \cos\tau$$

folgt. Für die Größen ϱ_ν, a_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. $a_1 = \varrho_1 = \varrho_2 = 0$, a_2, a_3, a_4 unbestimmt ,
2. $a_1 = \varrho_1 = a_2 = 0$, ϱ_2, a_3, a_4 unbestimmt ,
3. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $\varrho_1, \varrho_2, a_4$ unbestimmt ,

für die aus (4.5.12)

1. $\varphi_5'' + \varphi_5 = -2\,\varrho_3\,\varphi_2'' + \varphi_2'\,\varphi_2^2 = 2\,\varrho_3\,a_2 \cos\tau - \frac{1}{4}\,a_2^3 \sin\tau - \frac{1}{4}\,a_2^3 \sin 3\tau \,,$
2. $\varphi_5'' + \varphi_5 = -2\,\varrho_2\,\varphi_3'' = 2\,\varrho_2\,a_3 \cos\tau \,,$
3. $\varphi_5'' + \varphi_5 = -2\,\varrho_1\,\varphi_4'' = 2\,\varrho_1\,a_4 \cos\varrho$

folgt. Als Lösung erhält man

$$\varphi_5 = a_5 \cos\tau$$

mit

1. $a_1 = \varrho_1 = \varrho_2 = a_2 = 0$, ϱ_3, a_3, a_4, a_5 unbestimmt ,
2. $a_1 = \varrho_1 = a_2 = a_3 = 0$, $\varrho_2, \varrho_3, a_4, a_5$ unbestimmt ,
3. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, a_5$ unbestimmt .

Es ist offenbar nicht sinnvoll, die Rechnung fortzusetzen. Die gesuchten Größen sind entweder gleich Null oder aus den Gleichungen nicht zu bestimmen. Das Verfahren führt also im 2. Fall allgemein nicht zum Ziel.

4.6. Entwicklung von Lösung und Frequenz in der Umgebung eines beliebigen Parameterwertes

Wenn eine Differentialgleichung der Gestalt (4.1.2) für einen gewissen Parameterwert $\mu = \mu_0$ gelöst werden soll, liegt es nahe, gesuchte Lösung und Frequenz in der Umgebung dieses Wertes in eine Potenzreihe zu entwickeln. Setzt man $y = \mu - \mu_0$, so haben die Ansätze (4.1.3) und (4.1.4) die gewünschte Form, und (4.1.5) nimmt die Gestalt $\mu = \mu_0 + y$ an, d. h., es ist

$$\alpha_0 = \mu_0 , \quad \alpha_1 = 1 , \quad \alpha_n = 0 , \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Da aber im 1. Fall (Abschnitt 4.2) $\alpha_0 = 0$ sein muß und das Verfahren im 2. Fall (Abschnitt 4.5) nicht zum Ziel führt, ist die Bestimmung von $x(\tau)$ und ω als Potenzreihen nach $\mu - \mu_0$ mit Hilfe der hier angegebenen Verfahren nur möglich, wenn

$$\mu_0 = 0$$

ist; und dann gilt

$$y = \mu ,$$

so daß die Ansätze (4.1.3) und (4.1.4) mit denen des Verfahrens von LINDSTEDT identisch sind.

5. Bestimmung der periodischen Lösung mit Hilfe eines FOURIER-Ansatzes

Um die zur Zwangskraft harmonischen Schwingungen nichtautonomer Differentialgleichungssysteme zu bestimmen, kann man mit einem FOURIER-Ansatz für die Lösung in die Differentialgleichung eingehen und durch Koeffizientenvergleich ein nichtlineares Gleichungssystem herleiten, aus dem die FOURIER-Koeffizienten zu bestimmen sind (vgl. z. B. KAUDERER [31]). Diese Methode soll jetzt auf autonome Differentialgleichungen der Gestalt (1.0.6) ausgedehnt werden. Für die periodische Lösung $x(t)$ setzt man also die FOURIER-Reihe

$$x(t) = \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos r\,\omega\,t + b_r \sin r\,\omega\,t) \tag{5.0.1}$$

an. Dabei ist im Gegensatz zu den nichtautonomen Systemen außer den FOURIER-Koeffizienten a_r, b_r auch die Frequenz ω unbekannt.

5.1. Aufstellung des Gleichungssystems

Da die Lösungen autonomer Systeme invariant gegenüber Phasenverschiebungen sind, kann in (5.0.1) ein Koeffizient gleich Null gesetzt werden, etwa

$$b_1 = 0\,. \tag{5.1.1}$$

Unter der Voraussetzung, daß $x(t)$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, konvergieren mit (5.0.1) auch die Ableitungen

$$\dot{x}(t) = \omega \sum_{r=1}^{\infty} r\,(-\,a_r \sin r\,\omega\,t + b_r \cos r\,\omega\,t)\,, \tag{5.1.2}$$

$$\ddot{x}(t) = -\,\omega^2 \sum_{r=1}^{\infty} r^2\,(a_r \cos r\,\omega\,t + b_r \sin r\,\omega\,t)\,. \tag{5.1.3}$$

Setzt man (5.0.1) und (5.1.2) in (1.0.5) ein und führt die auftretenden Produkte von Sinus- und Kosinusfunktionen mit Hilfe der bekannten Additionstheoreme auf Ausdrücke zurück, die in den Winkelfunktionen linear sind, so kann man auch $f(x, \dot{x})$ in Form einer FOURIER-Reihe schreiben:

$$f(x, \dot{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} (c_r \cos r\,\omega\,t + d_r \sin r\,\omega\,t)\,. \tag{5.1.4}$$

Die Koeffizienten haben die folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} c_r &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \sum_{l=0}^{k} \omega^l\, c_{k,l}\, \gamma_{k,l}^{(r)}\,, \\ d_r &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \sum_{l=0}^{k} \omega^l\, c_{k,l}\, \delta_{k,l}^{(r)}\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{5.1.5}$$

Dabei sind die $\gamma_{k,l}^{(r)}$ und $\delta_{k,l}^{(r)}$ Polynome der Koeffizienten a_ϱ und b_ϱ des Ansatzes (5.0.1); die Abhängigkeit läßt sich durch Rekursionen angeben:

Zwei beliebige, stetige Funktionen $V(t)$ und $Y(t)$ mögen die gleichmäßig konvergenten Fourier-Reihen

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k \cos k\,\omega\,t + w_k \sin k\,\omega\,t)\,,$$

$$Y = \sum_{l=1}^{\infty} (y_l \cos l\,\omega\,t + z_l \sin l\,\omega\,t)$$

besitzen. Dann gilt für das Produkt

$$\begin{aligned} V\,Y = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \{ & v_k\,y_l\,[\cos(k-l)\,\omega\,t + \cos(k+l)\,\omega\,t] \\ & + v_k\,z_l\,[-\sin(k-l)\,\omega\,t + \sin(k+l)\,\omega\,t] \\ & + w_k\,y_l\,[\sin(k-l)\,\omega\,t + \sin(k+l)\,\omega\,tv] \\ & + w_k\,z_l\,[\cos(k-l)\,\omega\,t - \cos(k+l)\,\omega\,t]\}\,. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Ordnet man nach wachsenden Kosinus- und Sinusgliedern, so erhält man

$$V\,Y = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (p_r \cos r\,\omega\,t + q_r \sin r\,\omega\,t)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \sum_{s=1}^{\infty} [v_s\,(y_{s-r} + y_{s+r} + y_{r-s}) + w_s\,(z_{s-r} + z_{s+r} - z_{r-s})]\,, \\ q_r &= \sum_{s=1}^{\infty} [v_s\,(-z_{s-r} + z_{s+r} + z_{r-s}) + w_s\,(y_{s-r} - y_{s+r} + y_{r-s})]\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.1.7}$$

wobei $v_{-k} = w_{-k} = y_{-k} = z_{-k} = 0$ für $k \geqq 0$ sein soll. Aus (5.0.1), (5.1.2) und (5.1.4), (5.1.5) ergibt sich für die ersten $\gamma_{k,l}^{(r)}$, $\delta_{k,l}^{(r)}$

$$\begin{aligned} &\gamma_{1,0}^{(0)} = \delta_{1,0}^{(0)} = \gamma_{1,1}^{(0)} = \delta_{1,1}^{(0)} = 0\,, \\ &\gamma_{1,0}^{(r)} = a_r\,, \quad \delta_{1,0}^{(r)} = b_r\,, \quad \gamma_{1,1}^{(r)} = r\,b_r\,, \quad \delta_{1,1}^{(r)} = -r\,a_r\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r = 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Aus diesen Anfangswerten lassen sich mit Hilfe von (5.1.7) alle $\gamma_{k,l}^{(r)}$ und $\delta_{k,l}^{(r)}$ rekursiv bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{k,l}^{(r)} = p_r(\gamma_{k-k_0,l-l_0}^{(s)},\ \delta_{k-k_0,l-l_0}^{(s)};\ \gamma_{k_0,l_0}^{(s)},\ \delta_{k_0,l_0}^{(s)})\,, \\ &\delta_{k,l}^{(r)} = q_r(\gamma_{k-k_0,l-l_0}^{(s)},\ \delta_{k-k_0,l-l_0}^{(s)};\ \gamma_{k_0,l_0}^{(s)},\ \delta_{k_0,l_0}^{(s)})\,, \\ &k_0 = 1, 2, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right], \qquad l_0 = \mathrm{Max}\,(0,\ l-k+k_0), \ldots, \mathrm{Min}\left(k_0, \left[\frac{l+1}{2}\right]\right), \\ &s = 0, 1, \ldots\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.1.8}$$

Dabei sind die rechten Seiten von (5.1.7) mit $p_r(v_s, w_s; y_s, z_s)$ bzw. $q_r(v_s, w_s; y_s, z_s)$ abgekürzt.

Setzt man (5.0.1), (5.1.3) und (5.1.4) in die Differentialgleichung (1.0.6) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} f_r &\equiv (1 - r^2\,\omega^2)\,a_r + \mu\,c_r = 0\,, \\ g_r &\equiv (1 - r^2\,\omega^2)\,b_r + \mu\,d_r = 0\,, \qquad r = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.1.9}$$

für die unendlich vielen Unbekannten ω, a_r, b_r.

Aus der Differentialgleichung (1.0.6) folgt, daß die Lösung $x(t)$ beliebig oft differenzierbar ist. Dann gilt nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Fourier-Reihen [54]

$$|a_n| \leq \frac{C_k}{n^k}\,, \qquad |b_n| \leq \frac{C_k}{n^k}\,, \qquad |x^{(k)}(t)| \leq C_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{5.1.10}$$

Verschafft man sich durch zeichnerische Lösung der Differentialgleichung oder mit Hilfe eines Analogrechners oder auf analytischem Wege, etwa durch Konstruktion einer geeigneten LJAPUNOWschen Funktion, obere Schranken für $|x(t)|$, $|\dot{x}(t)|$,

$$|x(t)| \leqq A\,, \qquad |\dot{x}(t)| \leqq B\,, \tag{5.1.11}$$

so lassen sich mit Hilfe von (1.0.6) obere Schranken für die höheren Ableitungen bestimmen,

$$C_k = C_k(A, B, \mu)\,. \tag{5.1.12}$$

und damit Abschätzungen für die FOURIER-Koeffizienten a_r, b_r angeben. Sollen die a_r, b_r bis auf einen vorzugebenden Fehler ε bestimmt werden, so kann man wegen (5,1.10) ein $N(\varepsilon)$ derart berechnen, daß

$$|a_r| < \varepsilon\,, \qquad |b_r| < \varepsilon \qquad \text{für} \qquad r > N \tag{5.1.13}$$

gilt, die Koeffizienten a_r, b_r für $r > N$ also gleich Null gesetzt werden können. Das Gleichungssystem (5.1.9) ist damit endlich, nur wird, wie man sich leicht überlegt, die Anzahl der Gleichungen die der Unbekannten übersteigen. Bei der Auflösung können nur die ersten $2N$ Gleichungen berücksichtigt werden. Löst man (5.1.9) nach a_r, b_r auf, so folgt

$$a_r = -\frac{\mu}{1 - r^2\,\omega^2}\,c_r\,, \qquad b_r = -\frac{\mu}{1 - r^2\,\omega^2}\,d_r$$

und daraus wegen (5.1.13) eine Abschätzung für die rechten Seiten der restlichen Gleichungen von (5.1.9)

$$\left|\frac{\mu\,c_r}{1 - r^2\,\omega^2}\right| < \varepsilon\,, \qquad \left|\frac{\mu\,d_r}{1 - r^2\,\omega^2}\right| < \varepsilon\,, \qquad r > N\,. \tag{5.1.14}$$

5.2. Auflösung mit Hilfe des verallgemeinerten NEWTONschen Näherungsverfahrens

Das NEWTONsche Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung einer Funktion einer Veränderlichen (Tangenten-Näherungsverfahren) läßt sich wie folgt verallgemeinern. Gegeben sei ein nichtlineares Gleichungssystem von L Gleichungen mit L Unbekannten:

$$h_l(x_1, x_2, \ldots, x_L) = h_l(x_k) = 0\,, \qquad k, l = 1, 2, \ldots, L\,. \tag{5.2.1}$$

Setzt man voraus, daß alle partiellen Ableitungen der h_l existieren, so lassen sich die Funktionen in TAYLOR-Reihen entwickeln.

$$h_l(x_k + \Delta x_k) = h_l(x_k) + \sum_{\nu=1}^{L} \frac{\partial h_l(x_k)}{\partial x_\nu}\,\Delta x_\nu + \frac{1}{2!}\sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\partial^2 h_l(x_k)}{\partial x_\nu\,\partial x_\lambda}\,\Delta x_\nu\,\Delta x_\lambda + \cdots,$$
$$k, l = 1, 2, \ldots, L\,. \tag{5.2.2}$$

Der Vektor $(x_1, \ldots, x_L)$ bezeichne nun eine bereits bekannte Näherungslösung von (5.2.1), für die Korrekturen $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_L)$ so zu bestimmen sind, daß

$$h_l(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_L + \Delta x_L) = 0\,, \qquad l = 1, 2, \ldots, L, \tag{5.2.3}$$

wird. Bricht man die TAYLOR-Entwicklung nach den linearen Gliedern ab, so sind die Verbesserungen Δx_k aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{L} \frac{\partial h_l(x_k)}{\partial x_\nu}\,\Delta x_\nu = -\,h_l(x_k) \tag{5.2.4}$$

zu berechnen. Da man statt der vollständigen TAYLOR-Entwicklungen (5.2.2) nur die linearen Glieder berücksichtigt hat, werden die verbesserten Werte $x_k + \Delta x_k$ die h_l noch nicht zum Verschwinden bringen. Durch wiederholte Anwendung des angegebenen Verfahrens läßt

sich jedoch unter noch zu präzisierenden Voraussetzungen die gesuchte Nullstelle beliebig gut annähern. Setzt man

$$\Delta x_k = x_k^{(\varrho+1)} - x_k^{(\varrho)} \tag{5.2.5}$$

und ist die Matrix der ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial h_k}{\partial x_l}$, $k, l = 1, \ldots, L$, nichtsingulär, so kann man die Iterationsvorschrift in der Form

$$x_l^{(\varrho+1)} = x_l^{(\varrho)} - \sum_{\nu=1}^{L} \frac{\partial h_l'(x_k^{(\varrho)})}{\partial x_\nu} h_\nu(x_k^{(\varrho)}) \tag{5.2.6}$$

schreiben, wobei die $\frac{\partial h_l'(x_k^{(\varrho)})}{\partial x_\nu}$ die entsprechenden Elemente der zu der Matrix der $\frac{\partial h_l(x_k^{(\varrho)})}{\partial x_\nu}$ reziproken Matrix sind. Unter der Voraussetzung, daß die Matrix der ersten partiellen Ableitungen nichtsingulär ist und die zweiten partiellen Ableitungen beschränkt bleiben, konvergiert das Verfahren wie im Fall einer Veränderlichen quadratisch, wie man folgendermaßen sieht. Der Vektor $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_L)$ sei Lösung von (5.2.1). Dann erhält man mit

$$\Delta x_k = \bar{x}_k - x_k^{(\varrho)}$$

aus (5.2.2)

$$-h_l(x_k^{(\varrho)}) - \sum_{\nu=1}^{L} \frac{\partial h_l(x_k^{(\varrho)})}{\partial x_\nu} (\bar{x}_\nu - x_\nu^{(\varrho)}) = \frac{1}{2!} \sum_{\nu=1}^{L} \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\partial^2 h_l(x_k^{(\varrho)})}{\partial x_\nu \, \partial x_\lambda} (\bar{x}_\nu - x_\nu^{(\varrho)}) (\bar{x}_\lambda - x_\lambda^{(\varrho)}) + \cdots$$

und mit (5.2.6)

$$x_l^{(\varrho+1)} - \bar{x}_l = \frac{1}{2!} \sum_{\nu=1}^{L} \frac{\partial h_l'(x_k^{(\varrho)})}{\partial x_\nu} \sum_{\varkappa=1}^{L} \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\partial^2 h_\nu(x_k^{(\varrho)})}{\partial x_\varkappa \, \partial x_\lambda} (\bar{x}_\varkappa - x_\varkappa^{(\varrho)}) (\bar{x}_\lambda - x_\lambda^{(\varrho)}) + \mathrm{O}\{(\bar{x}_l - x_l^{(\varrho)})^3\} . \tag{5.2.7}$$

Will man die angegebene Iterationsvorschrift (5.2.6) auf das Gleichungssystem (5.1.9) anwenden, so sind die partiellen Ableitungen der Funktionen f_r und g_r nach ω, a_k, b_k zu bilden. Da f_r und g_r Polynome ihrer Argumente sind, handelt es sich dabei, allgemein gesprochen, um die Bildung der partiellen Ableitung einer Summe der Gestalt

$$\sum_{n_1=N_1}^{\bar{N}_1} \sum_{n_2=N_2}^{\bar{N}_2} \cdots \sum_{n_r=N_r}^{\bar{N}_r} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r}$$

nach einem beliebigen a_k, $k \in [N_1, \bar{N}_1] \vee [N_2, \bar{N}_2] \vee \ldots \vee [N_r, \bar{N}_r]$, für die offenbar gilt:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{n_1=N_1}^{\bar{N}_1} \sum_{n_2=N_2}^{\bar{N}_2} \cdots \sum_{n_r=N_r}^{\bar{N}_r} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r} = \sum_{n_2=N_2}^{\bar{N}_2} \sum_{n_3=N_3}^{\bar{N}_3} \cdots \sum_{n_r=N_r}^{\bar{N}_r} a_{n_2} a_{n_3} \ldots a_{n_r}$$

$$+ \sum_{n_1=N_1}^{\bar{N}_1} \sum_{n_3=N_3}^{\bar{N}_3} \cdots \sum_{n_r=N_r}^{\bar{N}_r} a_{n_1} a_{n_3} \ldots a_{n_r} + \ldots + \sum_{n_1=N_1}^{\bar{N}_1} \sum_{n_2=N_2}^{\bar{N}_2} \cdots \sum_{n_{r-1}=N_{r-1}}^{\bar{N}_r - 1} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_{r-1}} . \tag{5.2.8}$$

Dabei sind $N_i \leqq \bar{N}_i$, n_i, r, k positive ganze Zahlen. Die Ableitung des Produktes $a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r}$ nach a_k ist, wenn die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r, k$ beliebig fixiert sind und

$n_i \neq k$ für alle i ist, gleich Null

$n_i \neq k$, für alle $i \neq j$, aber $n_j = k$ ist, gleich $a_{n_1} \ldots a_{n_{j-1}} a_{n_{j+1}} \ldots a_{n_r}$,

$n_i \neq k$, für alle $i \neq j, l$, aber $n_j = n_l = k$ ist, gleich $2 a_k a_{n_1} \ldots a_{n_{j-1}} a_{n_{j+1}} \ldots a_{n_{l-1}} a_{n_{l+1}} \ldots a_{n_r}$,

. . . . . .

$n_i = k$ für alle i ist, gleich $r a_k^{r-1}$.

Auf der rechten Seite von (5.2.8) tritt auch tatsächlich ein Produkt $a_{n_1} \ldots a_{n_{j-1}} a_{n_{j+1}} \ldots a_{n_r}$ nur einmal, und zwar in der j-ten Summe auf, das Produkt $a_{n_1} \ldots a_{n_{j-1}} a_{n_{j+1}} \ldots a_{n_{l-1}} a_{n_{l+1}}$

. . . a_{n_r} dagegen zweimal, und zwar in der j-ten und l-ten Summe, usw. bis zum Produkt a_k^{r-1}, das r-mal, und zwar in jeder der r Summen, auftritt (sofern die Intervalle $[N_i, \overline{N}_i]$ sämtlich k enthalten).

Mit Hilfe von (5.2.8) läßt sich das lineare Gleichungssystem (5.2.4) aufstellen. Um die Iteration beginnen zu können, werden also lediglich noch geeignete Näherungswerte für ω und die a_r, b_r benötigt. Setzt man $b_r = a_r = 0$ für $r = 2, 3, \ldots$ und berücksichtigt nur die ersten beiden Gleichungen von (5.1.9), so lassen sich erste Näherungen für ω und a_1 bestimmen. Mit diesen Werten kann man dann etwa aus den ersten vier Gleichungen mit Hilfe der Iteration (5.2.6) Näherungen für die ersten vier Koeffizienten gewinnen, die man ihrerseits wieder als Ausgangswerte für eine Iteration mit einer größeren Anzahl L von Gleichungen

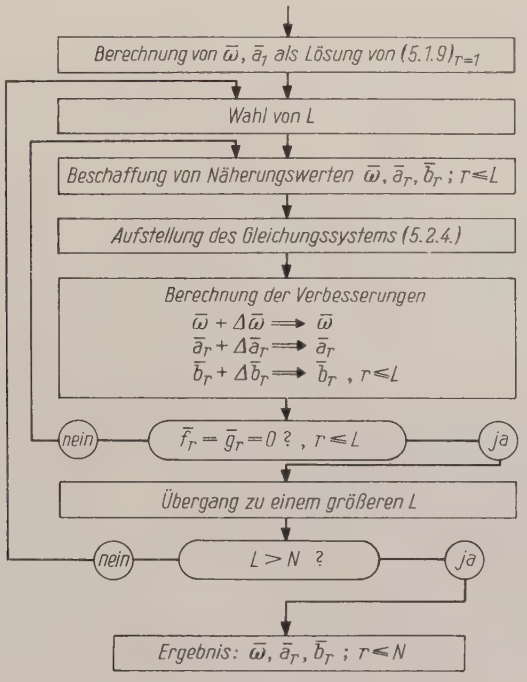

Abb. 5.1

benutzt, bis man schließlich die ersten N Koeffizienten so bestimmt hat, daß die ersten N Gleichungen von (5.1.9) im Rahmen der verlangten Genauigkeit erfüllt sind. (Abb. 5.1 gibt den Gang der Rechnung schematisch wieder.) Damit hat man für die gesuchte Lösung $x(t)$ eine Näherung

$$\bar{x}(t) = \sum_{r=1}^{N} (\bar{a}_r \cos r\,\bar{\omega}\,t + \bar{b}_r \sin r\,\bar{\omega}\,t) \tag{5.2.9}$$

gewonnen. Sie befriedigt statt (1.0.6) die Differentialgleichung

$$\ddot{\bar{x}} + \bar{x} + \mu f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \sum_{r=N+1}^{M \cdot N} (c_r \cos r\,\bar{\omega}\,t + d_r \sin r\,\bar{\omega}\,t)\,, \tag{5.2.10}$$

deren Koeffizienten c_r, d_r mit (5.1.5) aus den $\bar{a}_\nu$, $\bar{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, berechnet werden können. Aus (1.0.6) und (5.2.10) läßt sich eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung und m-ten Grades mit periodischen Koeffizienten für die Differenz $x(t) - \bar{x}(t)$ herleiten. Bisher ist es nicht gelungen, obere Schranken für die periodische Lösung dieser Differentialgleichung anzugeben und damit die Abweichung der Näherung $\bar{x}(t)$ von der exakten Lösung $x(t)$ zu bestimmen. Das Problem wird dadurch kompliziert, daß auch die Frequenz ω nur näherungsweise (in Gestalt von $\bar{\omega}$) bekannt ist.

5.3. Beispiel: VAN DER POLsche Differentialgleichung

Im Fall der VAN DER POLschen Differentialgleichung hat $f(x, \dot{x})$ nach (1.0.8) die Gestalt

$$f(x, \dot{x}) = -\dot{x} + x^2 \dot{x} , \tag{5.3.1}$$

also gilt

$$c_{11} = -1 , \qquad c_{31} = 1 , \qquad m = 3 . \tag{5.3.2}$$

Die Gleichung (1.0.8) besitzt genau eine periodische Lösung. Der Ansatz (5.0.1) ist also gerechtfertigt. Um das Gleichungssystem (5.1.9) aufstellen zu können, sind die c_r, d_r zu berechnen. Wegen (5.1.5) gilt

$$c_r = -\omega \gamma_{1,1}^{(r)} + \frac{1}{4} \omega \gamma_{3,1}^{(r)} , \tag{5.3.3}$$

$$d_r = -\omega \delta_{1,1}^{(r)} + \frac{1}{4} \omega \delta_{3,1}^{(r)} , \tag{5.3.4}$$

wobei, wie oben gezeigt wurde,

$$\gamma_{1,1}^{(r)} = r b_r , \qquad \delta_{1,1}^{(r)} = -r a_r \tag{5.3.5}$$

ist. Die Werte für $\gamma_{3,1}^{(r)}$ und $\delta_{3,1}^{(r)}$ könnte man mit Hilfe der Rekursion (5.1.8) über den Zwischenschritt der Berechnung von $\gamma_{2,0}^{(r)}$, $\delta_{2,0}^{(r)}$ oder $\gamma_{2,1}^{(r)}$, $\delta_{2,1}^{(r)}$ bestimmen, sie lassen sich aber auch direkt ausrechnen, wenn man den Ansatz (5.0.1) in den Ausdruck $x^2 \dot{x}$ einsetzt:

$$\begin{aligned} x^2 \dot{x} = \frac{\omega}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} s \,[& (b_s A_1 - a_s A_3) \cos (k - l - s)\, \omega t + (b_s A_1 + a_s A_3) \cos (k - l + s)\, \omega t \\ & + (b_s A_2 - a_s A_4) \cos (k + l - s)\, \omega t + (b_s A_2 + a_s A_4) \cos (k + l + s)\, \omega t \\ & + (b_s A_3 + a_s A_4) \sin (k - l - s)\, \omega t + (b_s A_3 - a_s A_1) \sin (k - l + s)\, \omega t \\ & + (b_s A_4 + a_s A_2) \sin (k + l - s)\, \omega t + (b_s A_4 - a_s A_2) \sin (k + l + s)\, \omega t] \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

mit

$$a_\nu = b_\nu = 0 \qquad \text{für} \qquad \nu \leqq 0 \tag{5.3.7}$$

und

$$\begin{aligned} A_1 &= a_k a_l + b_k b_l , & A_2 &= a_k a_l - b_k b_l , \\ A_3 &= -a_k b_l + b_k a_l , & A_4 &= a_k b_l + b_k a_l . \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Indizes in (5.3.6) kann man jeweils die ersten drei Kosinus- und Sinusterme zusammenfassen und dem vierten Kosinus- bzw. Sinusterm eine bezüglich der Indizes symmetrische Form geben:

$$\begin{aligned} x^2 \dot{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \Big[& (k + s - l)\,(b_k a_l a_s + b_k b_l b_s + a_k a_l b_s - a_k b_l a_s) \cos (k \quad l + s)\, \omega t \\ & + \frac{1}{3} (k + l + s)\,(b_k a_l a_s - b_k b_l b_s + a_k a_l b_s + a_k b_l a_s) \cos (k + l + s)\, \omega t \\ & + (k + s - l)\,(b_k a_l b_s - b_k b_l a_s - a_k a_l a_s - a_k b_l b_s) \sin (k - l + s)\, \omega t \\ & + \frac{1}{3} (k + l + s)\,(b_k a_l b_s + b_k b_l a_s - a_k a_l a_s + a_k b_l b_s) \sin (k + l + s)\, \omega t \Big] . \end{aligned}$$

Schließlich ordnet man nach wachsenden Kosinus- und Sinustermen, d. h., man faßt die Terme zusammen, deren Summationsindizes den Bedingungen

$$k + s - l = r , \qquad k + s - l = -r , \qquad k + l + s = r$$

genügen, und erhält

$$x^2 \dot{x} = \frac{\omega}{4} \sum_{r=1}^{\infty} (\gamma_{3,1}^{(r)} \cos r\,\omega\,t + \delta_{3,1}^{(r)} \sin r\,\omega\,t)$$

mit

$$\gamma_{3,1}^{(r)} = r \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Big[a_k\, a_l\, (2\, b_{r-k+l} - 2\, b_{-r-k+l} + b_{r+k+l} - b_{-r+k+l} + b_{r-k-l}) + b_k\, b_l\, (-\, b_{r+k+l} + b_{-r+k+l} - \frac{1}{3} b_{r-k-l}) \Big], \tag{5.3.8}$$

$$\delta_{3,1}^{(r)} = -\, r \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Big[a_k\, a_l\, (a_{r+k+l} + a_{-r+k+l} + \frac{1}{3} a_{r-k-l}) + b_k\, b_l\, (2\, a_{r-k+l} + 2\, a_{-r-k+l} - a_{r+k+l} - a_{-r+k+l} - a_{r-k-l}) \Big], \tag{5.3.9}$$

wobei wieder (5.3.7) zu berücksichtigen ist. Das Gleichungssystem (5.1.9) hat also im Fall der VAN DER POLschen Gleichung die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} f_r &\equiv (1 - r^2\,\omega^2)\, a_r - \mu\,\omega\, r\, b_r + \frac{1}{4}\,\mu\,\omega\,\gamma_{3,1}^{(r)} = 0\,, \\ g_r &\equiv (1 - r^2\,\omega^2)\, b_r + \mu\,\omega\, r\, a_r + \frac{1}{4}\,\mu\,\omega\,\delta_{3,1}^{(r)} = 0\,, \\ & \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.3.10}$$

Wie in 5.2 angegeben, wird, um das NEWTONsche Näherungsverfahren anwenden zu können, die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten auf eine endliche Zahl N beschränkt. Sämtliche Größen, die sich auf dieses reduzierte System beziehen, werden im weiteren durch einen Querstrich gekennzeichnet. Um das lineare Gleichungssystem (5.2.4) aufstellen zu können, sind mit (5.2.8) die partiellen Ableitungen von $\bar{f}_r$ und $\bar{g}_r$ nach $\bar{\omega}$ und $\bar{a}_r$, $\bar{b}_r$ zu bilden.

$$\frac{\partial \bar{f}_r}{\partial \omega} = -\,2\, r^2\, \bar{\omega}\, \bar{a}_r - \mu\, r\, \bar{b}_r + \frac{1}{4}\,\mu\,\bar{\gamma}_{3,1}^{(r)}\,, \qquad \frac{\partial \bar{g}_r}{\partial \omega} = -\,2\, r^2\, \bar{\omega}\, b_r + \mu\, r\, \bar{a}_r + \frac{1}{4}\,\mu\,\bar{\delta}_{3,1}^{(r)}\,,$$

$$\frac{\partial \bar{f}_r}{\partial a_s} = (1 - r^2\,\bar{\omega}^2)\,\delta_{r,s} + \mu\, r\, \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^{N} \bar{a}_n\, (\bar{b}_{r-n-s} - \bar{b}_{n+s-r} + \bar{b}_{n+s+r} + \bar{b}_{r+s-n} - \bar{b}_{s-r-n} + \bar{b}_{r+n-s} - \bar{b}_{n-r-s})\,,$$

$$\frac{\partial \bar{g}_r}{\partial \bar{a}_s} = \mu\, r\, \bar{\omega}\, \delta_{r,s} - \mu\, r\, \frac{\bar{\omega}}{4} \sum_{n=1}^{N} [\bar{a}_n\, (\bar{a}_{r-n-s} + \bar{a}_{r+s-n} + \bar{a}_{s-n-r} + 2\,\bar{a}_{s+n-r} + 2\,\bar{a}_{s+n+r}) - \bar{b}_n\, (\bar{b}_{r-n-s} + \bar{b}_{r+s-n} + \bar{b}_{s-n-r} - 2\,\bar{b}_{s+n-r} - 2\,\bar{b}_{s+n+r})],$$

$$\frac{\delta \bar{f}_r}{\delta \bar{b}_s} = -\,\mu\, r\, \bar{\omega}\, \delta_{r,s} + \mu\, r\, \frac{\bar{\omega}}{4} \sum_{n=1}^{N} [\bar{a}_n\, (\bar{a}_{r-n-s} - \bar{a}_{r+s-n} + \bar{a}_{s-n-r} + 2\,\bar{a}_{s+n-r} - 2\,\bar{a}_{s+n+r}) + \bar{b}_n\, (-\,\bar{b}_{r-n-s} + \bar{b}_{r+s-n} - \bar{b}_{s-n-r} + 2\,\bar{b}_{s+n-r} - 2\,\bar{b}_{s+n+r})]\,,$$

$$\frac{\partial \bar{g}_r}{\partial \bar{b}_s} = (1 - r^2\,\bar{\omega}^2)\,\delta_{r,s} - \mu\, r\, \frac{\bar{\omega}}{2} \sum_{n=1}^{N} \bar{b}_n\, (-\,\bar{a}_{r-n-s} - \bar{a}_{n+s-r} - \bar{a}_{n+s+r} + \bar{a}_{r+s-n} + \bar{a}_{s-r-n} + \bar{a}_{r+n-s} + \bar{a}_{n-r-s})\,,$$

wobei $\delta_{r,s}$ das KRONECKERsche Symbol bedeutet,

$$\delta_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{für } r = s\,, \\ 0 & \text{für } r \neq s\,, \end{cases}$$

und $a_r = b_r = 0$ für $r \leqq 0$ und $r > N$ ist. Da, wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugt, auch der Ansatz

$$x(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [a_r \cos r\,\omega\,t + b_r \sin r\,\omega\,t]\,, \qquad r \text{ ungerade}\,, \tag{5.3.11}$$

die Differentialgleichung befriedigt (d. h. die Lösungen symmetrisch bezüglich des Nullpunkts der Phasenebene sind), kann man die Rechnung dadurch vereinfachen, daß man von vornherein

$$a_{2n} = b_{2n} = 0 , \qquad n = 1, 2, \ldots , \tag{5.3.12}$$

setzt. Eine erste Näherung für die Unbekannten a_1, ω, a_r, b_r erhält man aus (5.3.10), wenn man $N = 1$ wählt und also nur die Gleichungen

$$(1 - \bar{\omega}^2)\, a_1 = 0 ,$$

$$\mu\, \bar{\omega}\, \bar{a}_1 \left(1 - \frac{1}{4} \bar{a}_1^2\right) = 0$$

betrachtet. Es ergeben sich die vom Parameter μ unabhängigen Ausgangsgrößen

$$\bar{a}_1 = 2 , \qquad \bar{\omega} = 1 , \qquad \bar{a}_r = \bar{b}_r = 0 , \qquad r = 3, 5, \ldots . \tag{5.3.13}$$

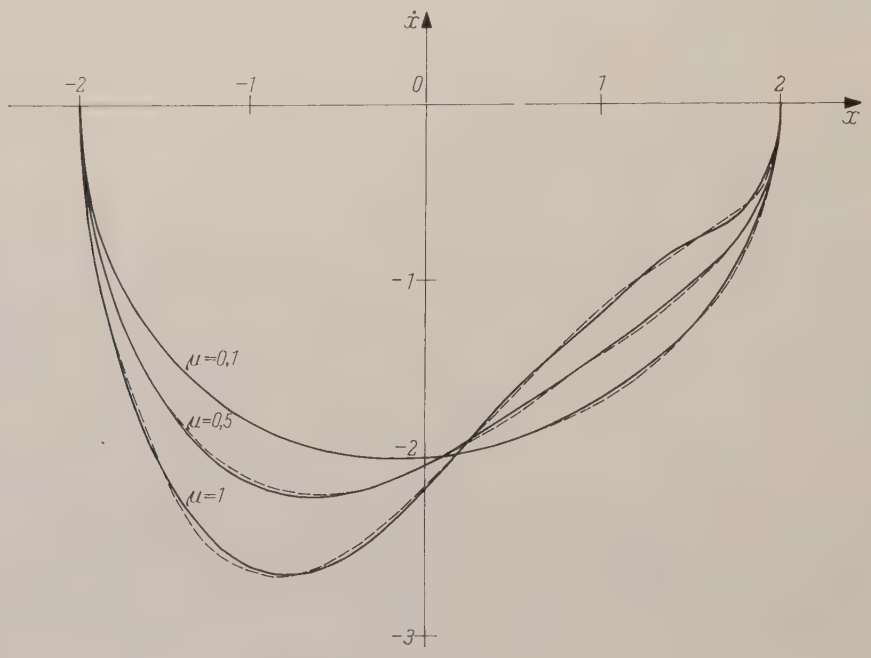

Abb. 5.2

Ausgehend von diesen Werten wurden auf dem Rechenautomaten Ural I Näherungswerte

$$\bar{a}_1, \bar{\omega}, \bar{a}_r, \bar{b}_r , \qquad r = 3, 5, 7 ,$$

in den Fällen $\mu = 0{,}1$; $0{,}5$; $1{,}0$ berechnet. In Abb. 5.2 sind die Lösungskurven in der Phasenebene den Ergebnissen des Lie-Reihen-Verfahrens (gestrichelt) gegenübergestellt.

6. Zusammenfassung

Im einleitenden ersten Kapitel werden die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit in den Rahmen der Nichtlinearen Mechanik eingeordnet, eine Reihe bereits bekannter, später benötigter Sätze ohne Beweis angegeben und einige grundlegende Voraussetzungen getroffen. Anschließend (Abschnitt 1.4) wird der Grenzzyklus der modifizierten VAN DER POLschen Differentialgleichung (1.4.1) für $\mu \to \infty$ untersucht. Dazu wird eine Transformation angegeben, die die Phasenebene auf eine Ebene abbildet, in der der Grenzzyklus endlich bleibt und seine Gestalt infolgedessen durch Konstruktion eines BENDIXSONschen Ringgebietes bestimmt werden kann.

Im zweiten Kapitel werden mit Hilfe der Theorie der LIE-Reihen periodische Lösungen autonomer, wesentlich nichtlinearer Differentialgleichungssysteme der Gestalt (1.0.1) bestimmt: Schließt man die singulären Punkte aus, so lassen sich in jedem Punkt der Phasenebene LIE-Reihen aufstellen, die in einem gewissen t-Intervall konvergieren und die durch den Punkt verlaufende Lösungskurve von (1.0.1) darstellen. Falls die Kurve sich nicht einem singulären Punkt nähert, kann das so gewonnene Funktionselement nach beiden Seiten durch neue LIE-Reihenentwicklungen analytisch fortgesetzt werden. Wählt man einen Punkt aus dem Einzugsgebiet eines stabilen Grenzzyklus als Ausgangspunkt der Rechnung und wiederholt die analytische Fortsetzung durch LIE-Reihenentwicklung in Richtung zunehmender t-Werte so lange, bis die Lösungskurve in sich selbst zurückläuft, so ist die periodische Lösung bestimmt. Beim praktischen Rechnen treten jedoch durch den Abbruch der LIE-Reihen nach endlich vielen Anfangsgliedern und durch Abrundung Fehler auf, so daß das Ergebnis nur als Näherung angesehen werden kann. Im Abschnitt 2.5 wird gezeigt, daß durch Abschätzung der bei jedem Schritt auftretenden Fehler mit der beschriebenen Methode ein beliebig schmales Ringgebiet berechnet werden kann, in dem die gesuchte geschlossene Phasenkurve liegt.

Im dritten Kapitel werden mit Hilfe des angegebenen Verfahrens Näherungskurven für die periodische Lösung der VAN DER POLschen Differentialgleichung (1.0.8) mit den Parameterwerten $\mu = 0(0{,}5)1(1)10(10)20$ berechnet, und für $\mu = 1$ wird ein Ringgebiet für den Grenzzyklus bestimmt.

Das vierte Kapitel stellt einen Versuch dar, den Anwendungsbereich des nur für kleine Parameterwerte $\mu \ll 1$ verwendbaren Verfahrens von LINDSTEDT zu vergrößern. Dazu werden Lösung und Frequenz der Differentialgleichung (1.0.6) in Potenzreihen nach einer Funktion $y(\mu)$ entwickelt und eine Reihe von Bedingungen für diese Funktion hergeleitet. Das Verfahren enthält als Spezialfall die Methode von SHOHAT.

Das im letzten Kapitel beschriebene Verfahren beruht auf einem FOURIER-Ansatz für die periodische Lösung, der in die Differentialgleichung (1.0.6) eingesetzt wird. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich ein unendliches nichtlineares Gleichungssystem für die Frequenz und die FOURIER-Koeffizienten. Beschränkt man sich auf endlich viele Koeffizienten, so läßt sich das System mit Hilfe des verallgemeinerten NEWTONschen Iterationsverfahrens lösen. Als Beispiel werden Näherungslösungen von (1.0.8) für die Parameterwerte $\mu = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1$ berechnet. Die numerischen Rechnungen zu den Kapiteln 3 und 5 wurden auf den Rechenautomaten ZRA 1 und URAL 1 des Institutes für Angewandte Mathematik und Mechanik der Deutschen Akademie der Wissenschaften durchgeführt.

7. Literatur

[1] Andronow, A. A., u. Chaikin, C. E., Theory of oscillations. Princeton Univ. Press, Princeton (New Jersey) 1949.

[2] Bellman, R., Kalaba, R., u. Vasudevan, R., A note on perturbation series for the periods of solutions of nonlinear differential equations. J. Math. Analysis Appl. **4** (1962) 341—345.

[3] Bendixson, L., Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. **24** (1901) 1—88.

[4] Bieberbach, L., Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[5] Birkhoff, G. D., Dynamical systems. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York 1927.

[6] Bogoljubow, N. N., u. Mitropolski, J. A., Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen. Akademie-Verlag, Berlin 1965. Übersetzung aus dem Russischen.

[7] Bridgeman, A. D., The maximum amplitude of oscillations described by van der Pol's equation. IRE Trans. Circuit Theory **9**, 3 (1961) 359.

[8] Cesari, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Ergebn. Math. Grenzgeb., Neue Folge, Heft 16, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

[9] Chaleat, R., Calculation of the oscillators period in function of their amplitude. Abstracts of reports of the Sec. Conf. Nonlin. Vibr., Warsaw 1962.

[10] Coddington, E. A., u. Levinson, N., Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1955.

[11] Collatz, L., Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[12] Coppel, W. A., Perturbation of periodic solutions: The degenerate case. Trudy meždunarodn. simp. nelin. koleban., Kiev 1961, Izdat. AN USSR, Kiev 1963.

[13] Cunningham, W. J., Introduction to nonlinear analysis. McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1958.

[14] Diliberto, S. P., u. Hufford, G., Perturbation theorems for non-linear ordinary differential equations. Ann. Math. Studies **36** (Contrib. Theory Nonlin. Vibr., vol. 3), Princeton Univ. Press, Princeton (New Jersey) 1956.

[15] Dorodnicyn, A. A., Asymptotische Lösung der van der Polschen Differentialgleichung (russ.). Priklad. Mat. Mech. **11** (1947) 313—328.

[16] Fajzibaev, E. F., Untersuchung einiger wesentlich nichtlinearer Schwingungssysteme, die sich nur wenig von exakt integrierbaren unterscheiden (russ.). Kandidatendissertation, Kiev 1963.

[17] Filatov, A. N., Anwendung der Lie-Reihen auf Probleme der Nichtlinearen Mechanik (russ.). Trudy meždunarodn. simp. nelin. koleban., Kiev 1961, Izdat. AN USSR, Kiev 1963.

[18] Furuya, S., On a nonlinear differential equation. Commentarii Math. Univ. St. Pauli **9** (1961) 97—113.

[19] Ghaffari, A., On Rayleigh's nonlinear vibration equation. Trudy meždunarodn. simp. nelin. koleban., Kiev 1961, Izdat. AN USSR, Kiev 1963.

[20] Gröbner, W., Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. VEB Dt. Verlag d. Wiss., Berlin 1960.

[21] Gröbner, W., Über die Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen mit Randbedingungen. m t w **9**, 4 (1962) 148—151.

[22] Hahn, W., Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. Ergebn. Math. Grenzgeb., Neue Folge, Heft 22, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

[23] den Hartog, J. P., u. Mesmer, G., Mechanische Schwingungen. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

[24] Ivanov, T. F., Periodische Bewegungen einiger autonomer Systeme (russ.). Izv. AN SSSR, OTN, Mech. Maš., **5** (1962).

[25] Ivanov, T. F., Bestimmung periodischer Bewegungen konservativer Systeme mit einem Freiheitsgrad (russ.). Dokl. AN SSSR **143** (1962) 2.

[26] Ivanov, T. F., Periodische Bewegungen einer Klasse autonomer Systeme (russ.). Priklad. Mat. Mech **27**, 6 (1963) 1124—1127.

[27] Jakubovič, V. A., The small parameter method for canonical systems with periodic coefficients. J. appl. Math. Mech. **23** (1959) 17—43.

[28] Kac, A. M., Biharmonische Schwingungen eines dissipativen nichtlinearen Systems, die von einer harmonischen Erregerkraft hervorgerufen oder aufrechterhalten werden (russ.). Priklad. Mat. Mech. **18** (1954) 425—444.

[29] Kac, A. M., Erzwungene Schwingungen nichtlinearer, nur wenig von konservativen abweichender Systeme mit einem Freiheitsgrad (russ.). Priklad. Mat. Mech. **19** (1955) 13—32.

[30] Kamke, E., Differentialgleichungen reeller Funktionen. Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1956.

[31] Kauderer, H., Nichtlineare Mechanik. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

[32] Kazakevič, V. V., Näherungsmethode zur Untersuchung einiger Typen stark nichtlinearer Systeme (russ.). Trudy meždunarodn. simp. nelin. koleban., Kiev 1961, Izdat. AN USSR, Kiev 1963.

[33] Kislicyn, S. G., Bestimmung von Periode und Form selbsterregter Schwingungen durch modifizierte Anwendung des Newtonschen Iterationsverfahrens (russ.). Trudy Inst. Maš. AN SSSR **21** (1961) 55—58.

[34] Klotter, K., Technische Schwingungslehre, Bd. I u. II. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951/1960.

[35] Klotter, K., Neuere Methoden und Ergebnisse auf dem Gebiet nichtlinearer Schwingungen. VDI-Berichte **4** (1955) 35.

[36] Klotter, K., Free oscillations of systems having quadratic damping and arbitrary restoring forces. J. Appl. Mech. **22**, 4 (1955) 493—499.

[37] Klotter, K., u. Kreyszig, E., Über eine besondere Klasse selbsterregter Schwingungen. Ing.-Archiv **25** (1957) 389—403.

[38] Klotter, K., u. Kreyszig, E., On a special class of self-sustained oscillations. J. Appl. Mech. (Ser. E) **27**, 3 (1960) 568—574.

[39] Knapp, H., Ergebnisse einer Untersuchung über den Wert der Lie-Reihen-Theorie für numerische Rechnungen in der Himmelsmechanik. ZAMM (Sonderheft) **42** (1962) T25—T27.

[40] Korganoff, A., Méthodes de calcul numérique, Tome I. Dunod, Paris 1961.

[41] Krogdahl, W. S., Numerical solutions of the van der Pol equation. ZAMP **11**, 1 (1960) 59—63.

[42] Kryloff, N., u. Bogoliuboff, N., Introduction to non-linear mechanics. Princeton Univ. Press, Princeton (New Jersey) 1947.

[43] Lefschetz, S., Differential equations: Geometric theory. Interscience Publishers, New York-London 1957.

[44] Lewis, D. C., Periodic solutions of differential equations containing a parameter. Duke math. J. **22**, 1 (1955) 39—56.

[45] Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. B. G. Teubner, Leipzig 1888.

[46] Liénard, A., Étude des oscillations entretenues. Revue Gén. de l'Electricité **23** (1928) 901—946.

[47] Lindstedt, A., Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. Mém. Acad. Sci. St.-Pétersbourg (Sér. 7) **31** (1883) 4.

[48] Littlewood, J. E., On van der Pol's equation with large k. Nonlin. Probl., Proc. Symp. Madison 1962 (1963) 161—175.

[49] Ljapunow, A. M., Das allgemeine Problem der Stabilität einer Bewegung (russ.). Sobr. Soč. II, Izdat. AN SSSR, Moskva 1954.

[49′] Ljapunow, A. M., Über Hillsche Reihen zur Darstellung der Mondbewegung (russ.). Sobr. Soč. I, Izdat. AN SSSR, Moskva 1954.

[50] Malkin, J. G., Theorie der Stabilität einer Bewegung. Akademie-Verlag, Berlin 1959.

[51] Minorsky, N., Introduction to nonlinear mechanics. J. W. Edwards, Ann Arbor 1947.

[52] Minorsky, N., The theory of oscillations. Surv. Appl. Math. II, Dynamics and Nonlinear Mechanics. John Wiley & Sons, New York 1958.

[53] Nemytskii, V. V., u. Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations. Princeton Univ. Press, Princeton (New Jesey) 1960.

[54] Ostrowski, A., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung III. Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1954.

[55] Papoulis, A., Strongly non-linear oscillations. J. Math. Phys. **37** (1958) 147—156.

[56] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villars, Paris 1892.

[57] Poincaré, H., Sur les courbes définies par une équation différentielle. Oeuvres I, VII, Gauthier-Villars, Paris 1928/1952.
[58] Proskurjakov, A. P., Eine Eigenschaft periodischer Lösungen quasilinearer autonomer Systeme mit mehreren Freiheitsgraden (russ.). Priklad. Mat. Mech. **24**, 4 (1960).
[59] Proskurjakov, A. P., Periodische Lösungen quasilinearer autonomer Systeme mit einem Freiheitsgrad als Reihen nach gebrochenen Potenzen des Parameters (russ.). Prikl. Mat. Mech. **25**, 5 (1961).
[60] Proskurjakov, A. P., Zur Konstruktion periodischer Lösungen quasilinearer autonomer Systeme mit mehreren Freiheitsgraden (russ.). Priklad. Mat. Mech. **26**, 2 (1962) 358—364.
[61] Proskurjakov, A. P., Konstruktion periodischer Lösungen quasilinearer autonomer Systeme mit mehren Freiheitsgraden in speziellen Fällen (russ.). Priklad. Mat. Mech. **27**, 6 (1963) 1128—1134.
[62] Rapoport, I. M., Asymptotische Methoden in der Theorie der Differentialgleichungen (russ.). Izdat. AN SSSR, Kiev 1954.
[63] Reissig, R., Sansone, G., u. Conti, R., Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen. Edizioni Cremonese, Rom 1963.
[64] Rjabov, Ju. A., Über ein Verfahren der Abschätzung des Anwendbarkeitsgebietes der Methode des kleinen Parameters in der Theorie nichtlinearer Schwingungen (russ.). Inž. Ž. **1**, 1 (1961) 16—28.
[65] Rjabov, Ju. A., Über die Abschätzung des Anwendbarkeitsgebietes der Methode des kleinen Parameters bei nichtlinearen Schwingungsproblemen (russ.). Trudy meždunarodn. simp. nelin. koleban., Kiev 1961, Izdat. AN USSR, Kiev 1963.
[66] Rjabov, Ju. A., Über ein Verfahren der Bestimmung des Konvergenzgebietes periodischer Reihenlösungen quasilinearer Differentialgleichungen mit einem kleinen Parameter. Resonanzfall (russ.). Izv. vyšš. učebn. zaved. (Mat.) **6** (31) (1962) 108—118.
[67] Sagirow, P., Über ein Synchronisierungsproblem von Minorsky. ZAMM **42**, 9 (1962) 414—415.
[68] Shohat, J., A new analytical method for solving van der Pol's and certain related types of non-linear differential equations, homogeneous and non-homogeneous. J. Appl. Phys. **14** (1943) 40—48.
[69] Shohat, J., On van der Pol's and related non-linear differential equations. J. Appl. Phys. **15** (1944) 568—574.
[70] Stoker, J. J., Nonlinear vibrations. Interscience Publishers, New York-London 1950.
[71] Struble, R. A., u. Fletcher, J. E., General perturbational solution of the harmonically forced van der Pol equation. J. Math. Phys. **2** (1961) 880—891.
[72] Struble, R. A., u. Fletcher, J. E., General perturbational solution of the Mathieu equation. J. Soc. Indust. Appl. Math. **10**, 2 (1962) 314—328.
[73] Struble, R. A., u. Yionoulis, S. M., General perturbational solution of the harmonically forced Duffing equation. Arch. Rat. Mech. Anal. **9** (1962) 422—438.
[74] Tichonov, A. N., Vasil'eva, A. B., u. Volosov, V. M., Differentialgleichungen, die einen kleinen Parameter enthalten (russ.). Trudy meždunarodn. simp. nelin. koleban., Kiev 1961, Izdat. AN USSR, Kiev 1963.
[75] Urabe, M., Periodic solution of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 0(0{,}2)1{,}0$. J. Sci. Hiroshima Univ. (Ser. A) **21** (1958) 193—207.
[76] Urabe, M., Remarks on periodic solutions of van der Pol's equation. J. Sci. Hiroshima Univ. (Ser. A) **24** (1960) 197—199.
[77] Urabe, M., Numerical study of periodic solutions of van der Pol's equation. Trudy meždunarodn. simp. nelin. koleban., Kiev 1961, Izdat. AN USSR, Kiev 1963.
[78] Urabe, M., Yanagiwara, H., u. Shinohara, Y., Periodic solution of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 2 \sim 10$. J. Sci. Hiroshima Univ. (Ser. A) **23**, 3 (1959) 325—366.
[79] van der Pol, B., The non-linear theory of electric oscillations. Proc. IRE **22** (1934) 1051—1086.
[80] Volosov, V. M., Periodische Lösungen einer nichtlinearen Selbstschwingungsgleichung (russ.). Dokl. AN SSSR **115** (1957) 20—22.
[81] Yanagiwara, H., A periodic solution of van der Pol's equation with a damping coefficient $\lambda = 20$. J. Sci. Hiroshima Univ. (Ser. A) **24**, 2 (1960) 201—217.
[82] Yanagiwara, H., Maximum of the amplitude of the periodic solution of van der Pol's equation. J. Sci. Hiroshima Univ. (Ser. A—I) **25**, 2 (1961) 127—134.
[83] Zaguskin, V. L., Handbuch für numerische Methoden zur Lösung algebraischer und transzendenter Gleichungen (russ.). Gos. izdat. fiziko-mat. lit., Moskva 1960.